



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

ESCUELA SUPERIOR DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

**MÉTODOS NODALES APLICADOS A LA
ECUACIÓN DE DIFUSIÓN DE NEUTRONES
DEPENDIENTE DEL TIEMPO EN GEOMETRÍA
HEXAGONAL – Z**

T E S I S

**PRESENTADA ANTE EL COLEGIO DE PROFESORES
DE LA SECCIÓN DE GRADUADOS DE LA ESCUELA
SUPERIOR DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS DEL
INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL,
PARA SATISFACER EN PARTE, LOS REQUISITOS
NECESARIOS PARA OBTENER EL GRADO DE**

**MAESTRÍA EN CIENCIAS FISICOMATEMÁTICAS
(LÍNEA DE INVESTIGACIÓN: INGENIERÍA NUCLEAR)**

POR

JAIME ESQUIVEL ESTRADA

DIRIGIDA POR

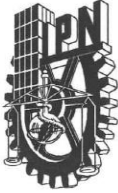
Dr. EDMUNDO DEL VALLE GALLEGOS

y

Dr. GUSTAVO ALONSO VARGAS

MÉXICO, D.F., MARZO 2015





INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL SECRETARIA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

ACTA DE REGISTRO DE TEMA DE TESIS Y DESIGNACIÓN DE DIRECTORES DE TESIS

México, D.F. a 27 de Febrero del 2015

El Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de ESFM en su sesión Ordinaria No. 13 celebrada el día 27 del mes de Noviembre 2013 conoció la solicitud presentada por el alumno:

<u>Esquivel</u> Apellido paterno	<u>Estrada</u> Apellido materno	<u>Jaime</u> Nombre (s)							
		Con registro: <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 2px 5px;">B</td> <td style="padding: 2px 5px;">1</td> <td style="padding: 2px 5px;">2</td> <td style="padding: 2px 5px;">0</td> <td style="padding: 2px 5px;">7</td> <td style="padding: 2px 5px;">9</td> <td style="padding: 2px 5px;">5</td> </tr> </table>	B	1	2	0	7	9	5
B	1	2	0	7	9	5			

Aspirante de la: Maestría en Ciencias Fisicomatemáticas

1.- Se designa al aspirante el tema de tesis titulado:
"Métodos nodales aplicados a la ecuación de difusión de neutrones dependiente del tiempo en geometría hexagonal-Z"

De manera general el tema abarcará los siguientes aspectos:
Se anexa hoja

2.- Se designan como Directores de Tesis a los Profesores:
Dr. Edmundo del Valle Gallegos y Dr. Gustavo Alonso Vargas

3.- El trabajo de investigación base para el desarrollo de la tesina será elaborado por el alumno en:
El Departamento de Física

que cuenta con los recursos e infraestructura necesarios.

4.- El interesado deberá asistir a los seminarios desarrollados en el área de adscripción del trabajo desde la fecha en que se suscribe la presente hasta la aceptación de la tesis por la Comisión Revisora correspondiente:

Directores de Tesis

Dr. Edmundo del Valle Gallegos

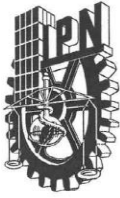
Dr. Gustavo Alonso Vargas

Aspirante

Jaime Esquivel Estrada

SEP
Presidente del Colegio Superior de
FISICA Y MATEMATICAS
SECCION DE ESTUDIOS DE
POSGRADO E INVESTIGACIÓN

Dr. Miguel Tufiño Velázquez



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

ACTA DE REVISIÓN DE TESIS

En la Ciudad de México D.F. siendo las 19:30 horas del día 27 del mes de Febrero del 2015 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de la Tesis, designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de la ESFM para examinar la tesis titulada:

“Métodos nodales aplicados a la ecuación de difusión de neutrones dependiente del tiempo en geometría hexagonal-Z”

Presentada por el alumno:

Esquivel	Estrada	Jaime
Apellido paterno	Apellido materno	Nombre(s)

Con registro:

B	1	2	0	7	9	5
---	---	---	---	---	---	---

aspirante de la :

Maestría en Ciencias Fisicomatemáticas

Después de intercambiar opiniones los miembros de la Comisión manifestaron **APROBAR LA TESIS**, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

LA COMISIÓN REVISORA

Directores de tesis

Dr. Edmundo del Valle Gallegos

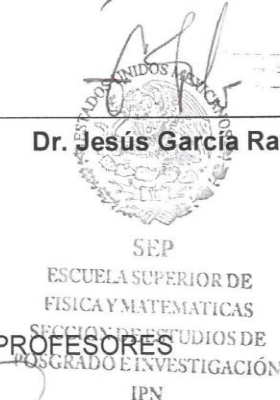
Dr. Gustavo Alonso Vargas

Dr. Arturo Fidencio Méndez Sánchez

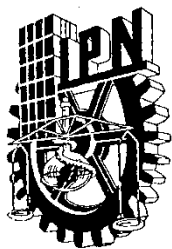
Dr. Jesús García Ravelo

M. en C. Carlos Filio López

PRESIDENTE DEL COLEGIO DE PROFESORES



Dr. Miguel Tufiño Velázquez



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

CARTA CESIÓN DE DERECHOS

En la Ciudad de México, D.F. el día 27 del mes de febrero del año 2015, el que suscribe Jaime Esquivel Estrada alumno del Programa de Maestría en Ciencias Fisicomatemáticas, con número de registro B120795, adscrito a la **Escuela Superior de Física y Matemáticas**, manifiesto que es el autor intelectual del presente trabajo de Tesis bajo la dirección del **Dr. Edmundo del Valle Gallegos y Dr. Gustavo Alonso Vargas** y cede los derechos del trabajo titulado Métodos nodales aplicados a la ecuación de difusión de neutrones dependiente del tiempo en geometría hexagonal – Z, al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin el permiso expreso del autor y/o directores del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a la siguiente dirección jaim.esquivel@inin.gob.mx. Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.

Jaime Esquivel Estrada

A mis padres y hermana

Jaime Esquivel Peña, Ma. de los Ángeles Estrada Pelcastre
y Alejandra Esquivel Estrada

Gracias por el apoyo incondicional que siempre me han brindado,
así como su impulso para seguir superándome.
Este trabajo es un reflejo de lo que Uds. han hecho por mí.

A mis familiares y amigos.

AGRADECIMIENTOS

A mis directores de Tesis, Dr. Edmundo del Valle Gallegos y Dr. Gustavo Alonso Vargas, por su paciencia, apoyo, interés y compromiso para el desarrollo de este trabajo.

A la Comisión Revisora conformada por el Dr. Arturo F. Méndez Sánchez, Dr. Jesús García Ravelo, M. en C. Carlos Filio López y mis directores de Tesis, por expresar sus comentarios para la mejora del presente trabajo.

Al personal de la SEPI–ESFM, por el apoyo en la realización de los trámites correspondientes.

A mis profesores del Posgrado en Ciencias Fisicomatemáticas, de la línea de investigación en Ingeniería Nuclear, por compartirme sus conocimientos y experiencias.

A mis amigos y compañeros de mi segundo hogar, el Instituto Nacional de Investigaciones Nucleares (ININ), especialmente a la Dirección de Investigación Científica, la Gerencia de Ciencias Aplicadas y el Departamento de Sistemas Nucleares.

A mis amigos, Rubén Díaz, Samuel Vargas, Vicente Xolocostli, Armando Gómez, Arturo Delfín, Ramón Ramírez, Pastor Enríquez por sus ánimos para continuar con este crecimiento. Así como al Dr. Javier Palacios, por permitirme desarrollar profesional y académicamente. De igual manera para Juan José Ortiz y Alejandro Castillo por todo su apoyo.

Al Fondo Sectorial de Sustentabilidad Energética SENER–CONACYT por el apoyo recibido del proyecto estratégico No. 212602 (AZTLAN Platform).

A todos Uds., gracias.

*“La ciencia es más que un simple conjunto de conocimientos:
es una manera de pensar”*

Carl Sagan

MÉTODOS NODALES APLICADOS
A LA ECUACIÓN DE DIFUSIÓN DE
NEUTRONES DEPENDIENTE DEL TIEMPO
EN GEOMETRÍA HEXAGONAL – Z

ÍNDICE GENERAL

	<i>Pág.</i>
Resumen	<i>iii</i>
Abstract	<i>iv</i>
Lista de Figuras	<i>v</i>
Lista de Tablas	<i>viii</i>
Introducción	<i>ix</i>
Capítulo 1. La Ecuación de Difusión de Neutrones	<i>1</i>
1.1 La Ecuación de Difusión de Neutrones	<i>3</i>
1.2 Condiciones de Frontera	<i>4</i>
1.3 Condiciones de Continuidad	<i>5</i>
1.4 Condiciones Iniciales	<i>6</i>
Capítulo 2. La Ecuación de Difusión de Neutrones en Multigrupos	<i>8</i>
2.1 La Ecuación de Difusión de Neutrones en Multigrupos	<i>10</i>
2.2 Condiciones de Frontera en Multigrupos	<i>13</i>
2.3 Condiciones de Continuidad en Multigrupos	<i>14</i>
2.4 Condiciones Iniciales en Multigrupos	<i>14</i>
Capítulo 3. Discretización Espacial de las Ecuaciones de la Cinética del Reactor: Caso de Un Solo Grupo de Energía	<i>16</i>
3.1 Discretización Espacial	<i>18</i>
3.1.1 Método de Galerkin	<i>19</i>
Capítulo 4. Discretización Espacial de las Ecuaciones de la Cinética del Reactor: Caso Multigrupos	<i>24</i>
4.1 Discretización Espacial	<i>26</i>
4.2 Discretización de la Variable Tiempo	<i>27</i>
4.2.1 Método θ de integración en tiempo	<i>27</i>

4.2.2	Integración respecto al tiempo de las ecuaciones de difusión en multigrupos	28
Capítulo 5. Métodos Nodales		33
5.1	Métodos Nodales	35
5.2	Método Nodal RTN-0	37
5.3	Aplicaciones del Método Nodal RTN-0	39
Capítulo 6. Métodos Nodales para Difusión de Neutrones en Geometría Hexagonal – Z		42
6.1	Mapeo del Dominio	44
6.2	Solución Variacional	51
Capítulo 7. Descripción del Programa de Cómputo AZNHEX		56
7.1	Descripción del programa AZNHEX	58
7.2	Descripción de las subrutinas y funciones del programa AZNHEX	58
7.3	Descripción de los datos de entrada para el programa AZNHEX	61
Capítulo 8. Aplicación del Programa AZNHEX en Problemas Benchmark		66
8.1	Problema AER-FCM-101	68
8.2	Reactor FBR con Geometría Hexagonal-Z en el Núcleo	71
8.3	Reactor VVER-440 con Dependencia en Tiempo	74
Capítulo 9. Resultados del Programa de Cómputo AZNHEX		79
9.1	Resultados del Problema AER-FCM-101	81
9.2	Resultados para el Reactor FBR con Geometría Hexagonal – Z en el Núcleo	97
9.3	Resultados para el Reactor VVER-440 con Dependencia en Tiempo	98
Capítulo 10. Conclusiones y Recomendaciones		104
Referencias		108
Apéndice A. Listado del Archivo de Datos de Entrada		112
Apéndice B. Listado del Archivo de Salida		118
Apéndice C. Secciones Eficaces para cada Material del Núcleo del Reactor FBR (KNK-II)		130

RESUMEN

Algunos de los más recientes diseños de reactores nucleares utilizan ensambles de combustible nuclear en forma de prismas de corte transversal hexagonal, lo cual implica que se desarrollen herramientas capaces de analizarlos tanto por la parte termodinámica, como por la parte neutrónica. Por ejemplo, uno de los análisis neutrónicos importantes, es el estudio de la difusión de neutrones. En este caso, la solución de la ecuación de difusión de neutrones, ya sea para reactores en estado estacionario o dependiente del tiempo, se obtiene a través de aproximaciones, generadas por ejemplo, mediante la implementación de métodos nodales. Nuestro caso de estudio desarrollado, conlleva el uso de métodos nodales como el RTN-0 (Raviart-Thomas-Nédélec de índice cero) para dar solución a la ecuación de difusión de neutrones con dependencia en tiempo. Dado que los métodos nodales han sido aplicados a geometrías cuadrangulares, en este trabajo se presenta una metodología en la que la geometría hexagonal, a través de una interpolación transfinita de Gordon-Hall, se convierte en la geometría adecuada para poder hacer uso del método nodal RTN-0. Como resultado, se desarrolló un programa de cómputo llamado AZNHEX, que a partir de archivos de entrada, que contienen datos neutrónicos y geométricos del núcleo del reactor a analizar, es posible obtener como resultados, el factor efectivo de multiplicación de neutrones o k_{eff} , así como la distribución de potencia radial y/o axial. El código AZNHEX fue sometido a diferentes pruebas en donde se han modelado tres problemas benchmark, realizando cálculos en estado estacionario en los primeros dos y cálculos dependientes del tiempo en el último de ellos. Los resultados proporcionados por AZNHEX, que en su mayoría tratan reactores de tipo VVER (Vadá Vadá Energeticheski Reactor), fueron comparados con diversas referencias obteniéndose diferencias no mayores al 0.5% en cuanto al factor efectivo de multiplicación de neutrones y del 1% en cuanto a la potencia, lo que permite concluir que AZNHEX es un buen candidato para ser usado como herramienta de cálculo en este tipo de reactores.

ABSTRACT

Some of the most recent designs of nuclear reactors use nuclear fuel assemblies of prismatic form with hexagonal base, which means that capable tools need to be developed to analyze the thermodynamic part and the neutron part as well. Particularly, for the neutron analyses, it is important the study of the time-independent and time-dependent neutron diffusion equations. In this case, the solution of neutron diffusion equations is obtained through approximations generated by implementing nodal methods. Our developed case study, means the use of nodal methods such as the RTN-0 (Raviart-Thomas-Nédélec, zero index), to solve the time-dependent neutron diffusion equation. Since the nodal methods have been applied to quadrangular geometries, a methodology in which the hexagonal geometry through a Gordon-Hall's transfinite interpolation becomes the suitable geometry to make use of nodal method RTN-0 is presented in this work. As a result a computer code called AZNHEX was developed, that from input files containing neutron and geometric data of the reactor core to be analyzed, it obtains the effective factor of neutron multiplication (k_{eff}) and radial and/or axial power distribution. AZNHEX code was tested with three benchmark problems, performing calculations in steady state in the first two and a time-dependent case in the last one. The obtained results by AZNHEX, which mostly deal VVER reactors (Vadá Vadá Energeticheski Reactor), were compared with various references achieving differences not larger than 0.5% in terms of the effective factor of neutron multiplication and 1% for the power, leading to a computational tool that is a good candidate to be used in this type of reactors.

LISTA DE FIGURAS

	<i>Pág.</i>
Figura 5.1. Representación de una celda (x, y, z) en coordenadas rectangulares	36
Figura 6.1.a. Transformación de coordenadas para un prisma hexagonal: Un prisma hexagonal es dividido en cuatro cuadrantes, con lo que se logra obtener un prisma de base trapezoidal por cada cuadrante	45
Figura 6.1.b. Transformación de coordenadas para un prisma hexagonal: Aplicando la transformación de coordenadas al prisma de base trapezoidal, el resultado geométrico es un cuadrilátero	45
Figura 6.2. Segmentos del prisma hexagonal en cuatro prismas de base trapezoidal	46
Figura 6.3. Malla local generada tras aplicar la Ec. (6.7), correspondiente al nodo hexagonal	50
Figura 6.4.a. Arreglo de prismas hexagonales	50
Figura 6.4.b. Su correspondiente dominio cuadrangular	51
Figura 8.1. Configuración axial de los ensambles combustible del núcleo del reactor VVER-1000	70
Figura 8.2. Configuración radial de los ensambles combustible del núcleo del reactor VVER-1000	70
Figura 8.3.a. Distribución radial de 30° del núcleo del reactor FBR (KNK-II)	72
Figura 8.3.b. Definición de los materiales utilizados	72
Figura 8.4. Distribución axial del núcleo del reactor FBR (KNK-II)	73
Figura 8.5. Distribución axial de los elementos componentes del reactor VVER-440	73

Figura 8.6.	Sección radial de 180° del núcleo del reactor VVER–440	75
Figura 8.7.	Distribución axial de los elementos componentes del núcleo del reactor	76
Figura 9.1.	Distribución radial de potencia para los códigos FCM y DYN3D	83
Figura 9.2.	Distribución radial de potencia para los códigos FCM y AZNHEX con 12 divisiones en la dirección z	84
Figura 9.3.	Distribución radial de potencia para los códigos FCM y AZNHEX con 24 divisiones en la dirección z	85
Figura 9.4.	Distribución radial de potencia para los códigos FCM y AZNHEX con 36 divisiones en la dirección z	86
Figura 9.5.	Distribución radial de potencia para los códigos FCM y AZNHEX con 48 divisiones en la dirección z	87
Figura 9.6.	Comparación entre la distribución radial de potencia obtenida con AZNHEX con 12 y 48 divisiones en la dirección z	88
Figura 9.7.	Comparación entre la distribución radial de potencia obtenida con AZNHEX con 24 y 48 divisiones en la dirección z	89
Figura 9.8.	Comparación entre la distribución radial de potencia obtenida con AZNHEX con 36 y 48 divisiones en la dirección z	90
Figura 9.9.	Perfil axial de potencia para los ensambles combustible 1 a 6, obtenidos con AZNHEX y los reportados con FCM	91
Figura 9.10.	Perfil axial de potencia para los ensambles combustible 7 a 12, obtenidos con AZNHEX y los reportados con FCM	92
Figura 9.11.	Perfil axial de potencia para los ensambles combustible 13 a 20, obtenidos con AZNHEX y los reportados con FCM	93
Figura 9.12.	Perfil axial de potencia para los ensambles combustible 1 a 6, obtenidos con AZNHEX usando mallas en z de 12 y 48	94
Figura 9.13.	Perfil axial de potencia para los ensambles combustible 7 a 12, obtenidos con AZNHEX usando mallas en z de 12 y 48	95
Figura 9.14.	Perfil axial de potencia para los ensambles combustible 13 a 20, obtenidos con AZNHEX usando mallas en z de 12 y 48	96

Figura 9.15.	Mapa radial de potencia para el núcleo del reactor VVER-440 a $t = 0s$	99
Figura 9.16.	Mapa radial de potencia para el núcleo del reactor VVER-440 a $t = 0.125s$	100
Figura 9.17.	Mapa radial de potencia para el núcleo del reactor VVER-440 a $t = 0.5s$	101
Figura 9.18.	Mapa radial de potencia para el núcleo del reactor VVER-440 a $t = 1.0s$	102
Figura 9.19.	Comportamiento en el tiempo de la potencia normalizada del núcleo para el reactor VVER-440 donde las secciones de remoción de todas las barras de control cambian en forma de escalón en +0.5% durante los primeros 0.25s	103
Figura 9.20.	Comportamiento en el tiempo de la potencia normalizada del núcleo para el reactor VVER-440 donde las secciones de remoción de todas las barras de control cambian en forma de escalón en -1.0% durante los primeros 0.25s	103

LISTA DE TABLAS

	<i>Pág.</i>
Tabla 8.1. Tipos de materiales y sus parámetros neutrónicos	69
Tabla 8.2. Parámetros neutrónicos para el problema benchmark VVER-440 dependiente del tiempo	77
Tabla 9.1. k_{eff} (AZNHEX) con varias divisiones axiales comparándose con $k_{eff} = 1.049526$	81
Tabla 9.2. Comparativo de la k_{eff} obtenida con PARCS y AZNHEX	97

INTRODUCCIÓN

En el cálculo numérico de reactores nucleares, es indispensable conocer las diferentes propiedades de los materiales que los constituyen. Por la parte neutrónica, se deben conocer las secciones transversales para las distintas interacciones que se tienen dentro del núcleo del reactor.

Al hablar de un reactor nuclear de fisión, se hace referencia a un dispositivo dentro del cual se puede mantener una reacción de fisión auto-sostenida en forma controlada, la cual se presenta en el núcleo del reactor, siendo éste, la parte más importante del reactor, dado que, como resultado de la fisión, se liberan grandes cantidades de energía.

La evolución en el diseño de reactores nucleares, ha generado importantes variantes en los componentes básicos como lo es el combustible, moderador, sistemas de seguridad, etc. Una clasificación de los reactores nucleares, se da en los siguientes grupos: reactores rápidos, térmicos e intermedios. Esta clasificación tiene su base en la energía promedio de los neutrones que produce la mayor parte de las reacciones de fisión.

Los reactores rápidos, son aquellos en donde las fisiones son producidas por neutrones de energía superior a 100keV. La ventaja principal de este tipo de reactores, se refleja en la producción de combustible, reduciendo el costo de su ciclo. Para este caso, la refrigeración con metal líquido, proporciona la ventaja de que el reactor puede funcionar a alta temperatura.

El diseño de este tipo de reactores consiste de ensambles combustible de geometría prismática con base hexagonal, existiendo conceptos como el reactor de alta temperatura (HTGR del inglés High Temperature Gas-Cooled Reactor), los reactores rápidos de cría (LMFBR, de sus siglas en inglés Liquid Metal Fast Breeder Reactor), el diseño soviético de agua presurizada, el VVER (de sus siglas en ruso Vadá Vadá Energeticheski Reactor) o recientemente, del concepto hindú Compact High Temperature Reactor (CHTR).

La geometría del núcleo de este tipo de reactores nucleares, es la que se analiza en este trabajo, teniendo por objetivo, el estudio neutrónico del mismo, solucionando la ecuación de difusión de neutrones dependiente del tiempo, mediante la implementación de métodos nodales. Para lo cual se ha desarrollado un programa de cómputo llamado AZNHEX (acrónimo de Aztlán Nodal Hexagonal), el cual formará parte de la plataforma AZTLAN. Esta plataforma que actualmente se encuentra en desarrollo, permitirá realizar el análisis y diseño de reactores nucleares, tanto para reactores térmicos como BWRs (del inglés Boiling Water Reactor) o PWRs (del inglés Pressurized Water Reactor), así como reactores rápidos y VVERs, siendo en este apartado en donde el código AZNHEX juega un papel importante. La plataforma AZTLAN conjunta los avances en aplicaciones neutrónicas y termohidráulicas, desarrolladas por instituciones académicas y de investigación de México, tal es el caso del Instituto Politécnico Nacional, la Universidad Nacional Autónoma de México, la Universidad Autónoma Metropolitana y el Instituto Nacional de Investigaciones Nucleares.

El presente trabajo se estructura de la siguiente manera: en el Capítulo 1 se presenta una descripción de las ecuaciones para la difusión de neutrones con dependencia en tiempo, en donde se definen las condiciones de continuidad y de frontera, así como las condiciones iniciales. De manera similar, pero tomando en cuenta el análisis en multigrupos de energía, la ecuación de difusión de neutrones se explica en el Capítulo 2. La discretización de las ecuaciones de la cinética del reactor, aplicando el Método de Galerkin, se presenta en el Capítulo 3 para el caso de un solo grupo de energía, mientras que en el Capítulo 4, se explica para el caso de multigrupos. Para el caso de un solo grupo de energía de la ecuación de difusión de neutrones con dependencia en tiempo, se recurre al método numérico de Wielandt para la obtención de una solución aproximada. En el Capítulo 5, se muestra la metodología y aplicación de los métodos nodales, particularmente el RTN-0, como una herramienta de solución para la ecuación de difusión de neutrones con dependencia en tiempo con geometría cuadrangular del núcleo. Sin embargo, dado que el estudio presentado en este trabajo considera la geometría hexagonal del núcleo del reactor, el Capítulo 6 presenta una metodología basada en la interpolación transfinita de Gordon-Hall, que permite transformar la geometría hexagonal en cuadrangular, para la posterior aplicación de los métodos nodales. Como resultado de lo anterior, se desarrolló el programa de cómputo AZNHEX, que permite el análisis de núcleos de reactores

nucleares con geometría hexagonal, a través de la ecuación de difusión de neutrones con dependencia en tiempo, el cual se detalla en el Capítulo 7, así como las descripciones del pre- y post-procesamiento de datos. A efecto de tener una validación sobre el buen funcionamiento del código AZNHEX, éste se puso a prueba a fin de resolver problemas de referencia (benchmark), los cuales se describen en el Capítulo 8, mostrando los resultados correspondientes al factor efectivo de multiplicación de neutrones (k_{eff}), flujos de neutrones y de potencia (tanto axial, como radial) en el Capítulo 9. Finalmente, la discusión sobre el funcionamiento del código AZNHEX, basado en los problemas de referencia se presenta en el Capítulo 10 a manera de conclusiones.

Adicionalmente, este trabajo presenta tres anexos; los dos primeros relacionados al procesamiento de datos del código AZNHEX, en el que se muestra el listado del archivo de entrada (Apéndice A) y por otro lado, el correspondiente listado del archivo de salida (Apéndice B). El Apéndice C cuenta con la información neutrónica (secciones eficaces), para los materiales del núcleo del reactor FBR (KNK-II), utilizados en un problema benchmark.

CAPÍTULO **1**

LA ECUACIÓN DE DIFUSIÓN DE NEUTRONES

En la teoría de reactores nucleares, uno de los problemas centrales, es la determinación de la distribución de neutrones en el núcleo del reactor, que está en función de la velocidad, posición o energía del neutrón. Es importante considerar la distribución neutrónica ya que determina la rapidez con que ocurren las reacciones entre neutrones a través de todo el sistema.

La distribución de neutrones puede ser estudiada mediante la solución de la ecuación de difusión, ya sea en estado estacionario o con dependencia en tiempo, como lo es en este caso de estudio.

En este capítulo se presenta una descripción de las ecuaciones para la difusión de neutrones dependiente del tiempo, estableciendo las condiciones de frontera y continuidad espacial.

1.1 LA ECUACIÓN DE DIFUSIÓN DE NEUTRONES

La ecuación de difusión de neutrones dependiente del tiempo, incluyendo las que rigen el comportamiento de los precursores de neutrones retardados están dadas por: [1, 2, 3]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{v(E)} \frac{\partial}{\partial t} \phi(\vec{r}, E, t) - \nabla \cdot D(\vec{r}, E, t) \nabla \phi(\vec{r}, E, t) + \Sigma_t(\vec{r}, E, t) \phi(\vec{r}, E, t) = \\ \int_0^{\infty} \Sigma_s(\vec{r}, E' \rightarrow E, t) \phi(\vec{r}, E', t) dE' + (1 - \beta) \chi(\vec{r}, E) \int_0^{\infty} v \Sigma_f(\vec{r}, E', t) \phi(\vec{r}, E', t) dE' + \chi(\vec{r}, E) \sum_{i=1}^I \lambda_i C_i(\vec{r}, t) \end{aligned} \quad \forall(\vec{r}, E, t) \in V \times [0, \infty) \times [0, T] \quad (1.1a)$$

y

$$\frac{\partial}{\partial t} C_i(\vec{r}, t) = \beta_i \int_0^{\infty} v \Sigma_f(\vec{r}, E', t) \phi(\vec{r}, E', t) dE' - \lambda_i C_i(\vec{r}, t) \quad i = 1, \dots, I_p; \quad \forall(\vec{r}, t) \in V \times [0, T] \quad (1.1b)$$

donde:

v es la velocidad de los neutrones.

$\phi(\vec{r}, E, t)$ es el flujo de neutrones.

$D(\vec{r}, E, t)$ es el coeficiente de difusión.

$\Sigma_t(\vec{r}, E, t)$ es la sección eficaz total.

$\Sigma_s(\vec{r}, E' \rightarrow E, t)$ es la sección eficaz de dispersión, desde la energía E' a la energía E .

$\chi(\vec{r}, E)$ es el espectro de fisión normalizado: $\int_0^{\infty} \chi(\vec{r}, E) dE = 1$

$\nu(\vec{r}, E, t)$ es el número promedio de neutrones liberados por fisión.

$\Sigma_f(\vec{r}, E, t)$ es la sección eficaz de fisión.

I_p es el número total de grupos de precursores de neutrones retardados.

β_i es la fracción de neutrones retardados.

β es la fracción total de neutrones retardados $\beta = \sum_{i=1}^{I_p} \beta_i$

λ_i es la constante de decaimiento.

$C_i(\vec{r}, t)$ es la concentración de precursores.

T es el tiempo final al que se desea conocer el flujo de neutrones y/o la concentración de precursores.

Para las definiciones anteriores, \vec{r} hace referencia a la posición, E a la energía y t al tiempo, mientras que el subíndice i , corresponde al i -ésimo grupo de precursores de neutrones retardados.

1.2 CONDICIONES DE FRONTERA

Las condiciones de frontera, ya sea externas (Γ_e) e internas (Γ_i) que debe cumplir el flujo escalar de neutrones, dependerán del tipo de problema que se desee solucionar. El flujo de neutrones debe ser considerado físicamente aceptable, por lo que un flujo negativo o imaginario, no tendría razón de ser, siendo así, el flujo debe ser una función real no negativa y finita, excepto en aquellos puntos singulares debido a una fuente distribuida.

Sobre la frontera exterior Γ_e , se deben satisfacer condiciones de frontera, las cuales se reducen a expresiones generales de la siguiente manera [1, 2]:

$$a(\vec{r}_e, E, t)\phi(\vec{r}_e, E, t) + b(\vec{r}_e, E, t)D(\vec{r}_e, E, t)\nabla\phi(\vec{r}_e, E, t) \cdot \hat{n}_e = 0 \quad (1.2)$$

A dicha ecuación se le conoce como condición de frontera externa, donde:

$$a(\vec{r}_e, E, t), b(\vec{r}_e, E, t) \geq 0 \quad (1.3a)$$

$$a(\vec{r}_e, E, t) + b(\vec{r}_e, E, t) > 0 \quad (1.3b)$$

$$\forall \vec{r}_e \in \Gamma_e; E, t \in [0, \infty) \times [0, T]$$

donde \hat{n}_e es un vector unitario normal a Γ_e en \vec{r}_e y dirigido hacia fuera. $a(\vec{r}_e, E, t)$ y $b(\vec{r}_e, E, t)$ son dos funciones no negativas de \vec{r}_e , las cuales no pueden ser cero al mismo tiempo.

En las condiciones anteriores, Ec. (1.2), se incluyen los casos particulares de corriente cero: $D(\vec{r}_e, E, t) \nabla \phi(\vec{r}_e, E, t) \cdot \hat{n}_e = 0$, lo que ocurre cuando ($a = 0$); el caso en donde se tiene flujo cero: $\phi(\vec{r}_e, E, t) = 0$, es decir, ($b = 0$) y la condición general de frontera extrapolada ($a, b \neq 0$).

1.3 CONDICIONES DE CONTINUIDAD

Además de las condiciones de frontera externa, es necesario definir condiciones de continuidad en una interface entre dos medios diferentes, como lo es la interfaz entre el núcleo del reactor y el reflector. El flujo de neutrones y la componente de la corriente de neutrones normal a la interfaz, deben ser continuos a través de dicha superficie. Las condiciones de continuidad en las interfaces Γ_i se definen por las siguientes expresiones:

$$\phi(\vec{r}_i - 0, E, t) = \phi(\vec{r}_i + 0, E, t) \quad (1.4a)$$

$$D(\vec{r}_i - 0, E, t) \nabla \phi(\vec{r}_i - 0, E, t) \cdot \hat{n}_i = D(\vec{r}_i + 0, E, t) \nabla \phi(\vec{r}_i + 0, E, t) \cdot \hat{n}_i \quad (1.4b)$$

$$\forall \vec{r}_i \in \Gamma_i; E, t \in [0, \infty) \times [0, T]$$

donde \hat{n}_i es un vector unitario normal a Γ_i en \vec{r}_i .

1.4 CONDICIONES INICIALES

Dada la dependencia en tiempo de las ecuaciones (1.1a) y (1.1b) es preciso proporcionar las condiciones iniciales que deberán satisfacer el flujo de neutrones y cada una de las concentraciones de precursores de neutrones retardados. Al tiempo $t = 0s$, el flujo de neutrones como las concentraciones de precursores de neutrones retardados deberán conocerse para poder saber su comportamiento para tiempos $t > 0s$, dado un cambio en algunas de las propiedades físicas del medio que constituye el volumen de interés. Al tiempo $t = 0s$, el flujo de neutrones será aquel que corresponda al estado crítico inicial o estado estacionario, mientras que las concentraciones de precursores de neutrones retardados, serán las que satisfagan el estado estacionario que incumbe a las ecuaciones (1.1b). Lo antes mencionado se puede expresar en la siguiente forma:

$$\phi(\vec{r}, E, 0) = \phi_0(\vec{r}, E) \quad \forall (\vec{r}, E) \in V \times [0, \infty) \quad (1.5a)$$

$$C_i(\vec{r}, 0) = \frac{\beta_i}{\lambda_i} \int_0^\infty \nu \Sigma_f(\vec{r}, E', t) \phi_0(\vec{r}, E', t) dE' \quad i = 1, \dots, I_p; \quad \forall \vec{r} \in V \quad (1.5b)$$

donde $\phi_0(\vec{r}, E)$ es el flujo de neutrones crítico al tiempo $t = 0s$, es decir, $\phi_0(\vec{r}, E)$ satisface la ecuación de difusión en estado estacionario dada por:

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot D(\vec{r}, E, 0) \nabla \phi_0(\vec{r}, E) + \Sigma_t(\vec{r}, E, 0) \phi_0(\vec{r}, E) - \int_0^\infty \Sigma_s(\vec{r}, E' \rightarrow E, 0) \phi_0(\vec{r}, E') dE' = \\ \frac{\chi(\vec{r}, E)}{k} \int_0^\infty \nu(\vec{r}, E', 0) \Sigma_f(\vec{r}, E', 0) \phi_0(\vec{r}, E') dE' \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\forall (\vec{r}, E) \in V \times [0, \infty)$$

donde k representa el valor propio y $\phi_0(\vec{r}, E)$ es la función propia correspondiente. De todos los valores propios de la Ec. (1.6), el que tiene interpretación física es el dominante, es decir, el valor más grande de todos, siendo así que en el área de la Física de Reactores Nucleares, se le conoce como factor efectivo de multiplicación de neutrones (k_{eff}) y a $\phi_0(\vec{r}, E)$, como el flujo crítico de neutrones.

Por lo anterior, la sección eficaz de fisión (Σ_f) que hace crítico al sistema está dada por:

$$\Sigma_f(\vec{r}, E) = \frac{\Sigma_f(\vec{r}, E, 0)}{k_{eff}} \quad \forall (\vec{r}, E) \in V \times [0, \infty) \quad (1.7)$$

En capítulos posteriores, se muestra la importancia de la obtención del factor efectivo de multiplicación de neutrones.

CAPÍTULO 2

LA ECUACIÓN DE DIFUSIÓN DE NEUTRONES EN MULTIGRUPOS

Las ecuaciones de la cinética de reactores nucleares descritas en el Capítulo 1 contienen 5 variables independientes, 3 de \bar{r} , 1 correspondiente a la energía E y 1 a la variable tiempo t . La cantidad de variables dependientes es de $1+I_p$, 1 para el flujo escalar de neutrones y las I_p restantes para las concentraciones de precursores de neutrones retardados que no dependen de la energía E . Una inspección simple de las ecuaciones de la cinética introducidas en el capítulo anterior, permite decir que se trata de un sistema de ecuaciones integro-diferenciales acopladas, las cuales son discretizadas en cada una de sus variables independientes, hasta obtener un sistema algebraico que pueda ser resuelto utilizando métodos numéricos afines con el tipo de matrices o de problemas algebraicos que resulten (problema de valor propio en el caso estacionario). La primera variable independiente que es aproximada es la energía E utilizando una técnica denominada de Multigrupos, la cual, permite introducir valores promediados para las correspondientes secciones eficaces involucradas en el problema en cada uno de los G subintervalos en los que se divide el intervalo de interés de la energía de los neutrones.

Así, en este capítulo se describirá la forma clásica de eliminar la variable energía mediante la técnica de Multigrupos, para así llegar a obtener las ecuaciones de la cinética de reactores donde solo aparecen 4 variables independientes.

2.1 LA ECUACIÓN DE DIFUSIÓN DE NEUTRONES EN MULTIGRUPOS

Para reducir la cantidad de variables independientes involucradas en la solución de la ecuación de difusión de neutrones, necesariamente se realizan aproximaciones. Para el caso de un intervalo de energías del neutrón, las aproximaciones suelen ser determinadas analíticamente, sin embargo, dada la complejidad de los parámetros dependientes de la energía, hacen que prácticamente sea imposible la obtención de una solución analítica, para el caso general.

La energía de los neutrones en un reactor nuclear, toma valores desde aproximadamente 0.01eV hasta 10MeV. Teniendo en cuenta que las secciones eficaces tienen una fuerte dependencia respecto a la energía, es necesario que el intervalo de energía de los neutrones, conste de G subintervalos o grupos, de tal forma que el número g del grupo, donde $(g = 1, \dots, G)$, aumente conforme la energía disminuye.

Aplicando la teoría de Multigrupos [2], que consiste en segmentar el espectro de energía, las secciones eficaces se sustituyen por un valor promedio en energía sobre cada grupo, de tal forma que la rapidez de reacciones no cambie. Así para el g -ésimo grupo de energía se tienen las siguientes definiciones para [1, 2]:

» El flujo de neutrones:

$$\phi_g(\vec{r}, t) \equiv \int_{E_g}^{E_{g-1}} \phi(\vec{r}, E, t) dE \quad (2.1)$$

» La sección eficaz total:

$$\Sigma_{tg}(\vec{r}, t) \equiv \frac{1}{\phi_g(\vec{r}, t)} \int_{E_g}^{E_{g-1}} \Sigma_t(\vec{r}, E, t) \phi(\vec{r}, E, t) dE \quad (2.2)$$

» El coeficiente de difusión:

$$D_g(\vec{r}, t) \int_{E_g}^{E_{g-1}} \nabla \phi(\vec{r}, E, t) dE \equiv \int_{E_g}^{E_{g-1}} D(\vec{r}, E, t) \nabla \phi(\vec{r}, E, t) dE \quad (2.3)$$

» La sección eficaz de dispersión del grupo g' al grupo g :

$$\Sigma_{sg' \rightarrow g}(\vec{r}, t) \equiv \frac{1}{\phi_{g'}(\vec{r}, t)} \int_{E_g}^{E_{g-1}} \int_{E_g}^{E_{g'-1}} \Sigma_s(\vec{r}, E' \rightarrow E, t) \phi(\vec{r}, E', t) dE' dE \quad (2.4)$$

» El producto del número promedio de neutrones emitidos por fisión, por sección eficaz de fisión, para el grupo g' :

$$\nu_g \Sigma_{fg'}(\vec{r}, t) \equiv \frac{1}{\phi_{g'}(\vec{r}, t)} \int_{E_g}^{E_{g'-1}} \nu(\vec{r}, E', t) \Sigma_f(\vec{r}, E', t) \phi(\vec{r}, E', t) dE' \quad (2.5)$$

» Finalmente, el espectro de neutrones para el grupo g , es:

$$\chi_g(\vec{r}) \equiv \int_{E_g}^{E_{g-1}} \chi(\vec{r}, E) dE \quad (2.6)$$

Ahora bien, utilizando estas definiciones, las ecuaciones (1.1a) y (1.1b) se pueden reescribir en la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \frac{1}{v_g} \frac{\partial}{\partial t} \phi_g(\vec{r}, t) - \nabla \cdot D_g(\vec{r}, t) \nabla \phi_g(\vec{r}, t) + \Sigma_{rg}(\vec{r}, t) \phi_g(\vec{r}, t) = \\ \sum_{\substack{g'=1 \\ g' \neq g}}^G \Sigma_{sg' \rightarrow g}(\vec{r}, t) \phi_{g'}(\vec{r}, t) + (1 - \beta) \chi_g(\vec{r}) \sum_{g'=1}^G v \Sigma_{fg'}(\vec{r}, t) \phi_{g'}(\vec{r}, t) + \chi_g(\vec{r}) \sum_{i=1}^{I_p} \lambda_i C_i(\vec{r}, t) \end{aligned} \quad (2.7a)$$

$$\forall(\vec{r}, t) \in V \times [0, T]; \quad g = 1, \dots, G$$

y

$$\frac{\partial}{\partial t} C_i(\vec{r}, t) = \beta_i \sum_{g'=1}^G v \Sigma_{fg'}(\vec{r}, t) \phi_{g'}(\vec{r}, t) - \lambda_i C_i(\vec{r}, t) \quad i = 1, \dots, I_p; \quad \forall(\vec{r}, t) \in V \times [0, T] \quad (2.7b)$$

donde ahora, considerando que \vec{r} es la posición, t el tiempo y g corresponde al grupo de energía, se tiene:

v es la velocidad de los neutrones.

$\phi_g(\vec{r}, t)$ es el flujo de neutrones.

$D_g(\vec{r}, t)$ es el coeficiente de difusión.

$\Sigma_{sg' \rightarrow g}(\vec{r}, t)$ es la sección eficaz de dispersión del grupo de energía g' al grupo de energía g .

$\chi_g(\vec{r})$ es la fracción de neutrones que surgen de la fisión con energías en el grupo g .

$\nu_g(\vec{r}, t)$ es el número promedio de neutrones liberados por fisión.

$\Sigma_{fg'}(\vec{r}, t)$ es la sección eficaz de fisión correspondiente al grupo de energía g' .

Σ_{rg} es la sección eficaz de remoción, la cual está definida por:

$$\Sigma_{rg}(\vec{r}) = \Sigma_{tg}(\vec{r}) - \Sigma_{sg \rightarrow g}(\vec{r}) \quad (2.8a)$$

o bien,

$$\Sigma_{rg}(\vec{r}) = \Sigma_{ag}(\vec{r}) + \Sigma_{sg}(\vec{r}) - \Sigma_{sg \rightarrow g}(\vec{r}) \quad (2.8b)$$

donde $\Sigma_{ag}(\vec{r}, t)$, $\Sigma_{sg}(\vec{r}, t)$ y $\Sigma_{tg}(\vec{r}, t)$ son las secciones eficaces de absorción, de dispersión y total, respectivamente, en la posición \vec{r} y tiempo t correspondientes al grupo de energía g .

2.2 CONDICIONES DE FRONTERA EN MULTIGRUPOS

En un caso similar al que fue presentado en la Sección 1.2, ahora para G grupos de energía, se tiene que las condiciones de continuidad, están dadas por las siguientes ecuaciones:

$$a_g(\vec{r}_e, t)\phi_g(\vec{r}_e, t) + b_g(\vec{r}_e, t)D_g(\vec{r}_e, t)\nabla\phi_g(\vec{r}_e, t)\cdot\hat{n}_e = 0 \quad g=1, \dots, G; \quad \forall \vec{r}_e \in \Gamma_e; \quad t \in [0, T] \quad (2.9)$$

donde:

$$a_g(\vec{r}_e, t), b_g(\vec{r}_e, t) \geq 0 \quad (2.10a)$$

$$a_g(\vec{r}_e, t) + b_g(\vec{r}_e, t) > 0 \quad (2.10b)$$

$$g=1, \dots, G; \quad \forall \vec{r}_e \in \Gamma_e; \quad t \in [0, T]$$

Recordando que \hat{n}_e es un vector unitario normal a Γ_e en \vec{r}_e y dirigido hacia fuera y $a_g(\vec{r}_e, t)$ y $b_g(\vec{r}_e, t)$ son dos funciones no negativas de \vec{r}_e , que no pueden tomar valor cero al mismo tiempo.

De igual manera, para las condiciones de frontera, Ec. (2.9), se incluyen los casos particulares de corriente cero, $D_g(\vec{r}_e, t)\nabla\phi_g(\vec{r}_e, t)\cdot\hat{n}_e = 0$, hecho que sucede si $(a_g = 0)$; flujo cero, dado por $\phi_g(\vec{r}_e, t) = 0$, considerando que $(b_g = 0)$ y la condición general de frontera extrapolada $(a_g, b_g \neq 0)$.

Para todos los casos, $g = 1, \dots, G$.

2.3 CONDICIONES DE CONTINUIDAD EN MULTIGRUPOS

Análogamente que en la Sección 1.3, las condiciones de continuidad para G grupos de energía, donde $g = 1, \dots, G$, estas quedan expresadas por:

$$\phi_g(\vec{r}_i - 0, t) = \phi_g(\vec{r}_i + 0, t) \quad (2.11a)$$

$$D_g(\vec{r}_i - 0, t) \nabla \phi_g(\vec{r}_i - 0, t) \cdot \hat{n}_i = D_g(\vec{r}_i + 0, t) \nabla \phi_g(\vec{r}_i + 0, t) \cdot \hat{n}_i \quad (2.11b)$$

$$g = 1, \dots, G; \quad \forall \vec{r}_i \in \Gamma_i; \quad t \in [0, T]$$

donde \hat{n}_i es un vector unitario normal a Γ_i en \vec{r}_i .

2.4 CONDICIONES INICIALES EN MULTIGRUPOS

Análogamente que en la Sección 1.4, las condiciones iniciales para G grupos de energía, donde $g = 1, \dots, G$, éstas quedan expresadas por:

$$\phi_g(\vec{r}, 0) = \phi_{0g}(\vec{r}) \quad g = 1, \dots, G; \quad \forall \vec{r} \in V \quad (2.12a)$$

$$C_i(\vec{r}, 0) = \frac{\beta_i}{\lambda_i} \sum_{g'=1}^G \nu \Sigma_{fg'}(\vec{r}, 0) \phi_{0g'}(\vec{r}) \quad i = 1, \dots, I_p; \quad \forall \vec{r} \in V \quad (2.12b)$$

donde $\phi_{0g'}(\vec{r})$ es el flujo de neutrones crítico al tiempo $t = 0s$ correspondiente al grupo de energía g' , es decir, con $g' = 1, \dots, G$ que satisfacen las ecuaciones de difusión para los G grupos de energía dadas por:

$$-\nabla \cdot D_g(\vec{r}, 0) \nabla \phi_{0g}(\vec{r}) + \Sigma_{rg}(\vec{r}, 0) \phi_{0g}(\vec{r}) - \sum_{\substack{g'=1 \\ g' \neq g}}^G \Sigma_{sg' \rightarrow g}(\vec{r}, 0) \phi_{0g'}(\vec{r}) = \frac{\chi_g(\vec{r})}{k} \sum_{g'=1}^G \nu_{g'} \Sigma_{fg'}(\vec{r}, 0) \phi_{0g'}(\vec{r})$$

$$g = 1, \dots, G; \quad \forall \vec{r} \in V \quad (2.13)$$

donde, de manera análoga que en la Sección 1.4, k representa el valor propio y para este caso, $\phi_{0g}(\vec{r})$ es su correspondiente función propia. Al obtener el mayor valor propio de la Ec. (2.13), será el que tenga la interpretación física de k_{eff} , y $\phi_{0g}(\vec{r})$ del flujo crítico de neutrones.

Por lo tanto, las secciones eficaces de fisión (Σ_{fg}) que hacen crítico el sistema están dadas por:

$$\Sigma_{fg}(\vec{r}) = \frac{\Sigma_{fg}(\vec{r}, 0)}{k_{eff}} \quad g = 1, \dots, G \quad (2.14)$$

CAPÍTULO 3

DISCRETIZACIÓN ESPACIAL DE LAS ECUACIONES DE LA CINÉTICA DEL REACTOR: CASO DE UN SOLO GRUPO DE ENERGÍA

Conocer la distribución neutrónica es una prioridad dentro del estudio de reactores nucleares. Para ello se han empleado diferentes procedimientos numéricos para tratar el problema estacionario, como por ejemplo, mediante la aplicación del método de elementos finitos.

Una descripción de las principales etapas para llevar a cabo la discretización, es la siguiente:

- Discretización del dominio en subdominios simples, llamados elementos; comúnmente, estos son un número finito de ellos. Dentro de cada elemento se formulan funciones de interpolación (polinomios por partes), en términos de parámetros asociados a puntos discretos o nodos sobre la frontera de los elementos.
- Ensamblar las ecuaciones algebraicas en el espacio apropiado, en la matriz global (tipo banda).
- Asignar las condiciones de frontera pre–escritas por el problema en la matriz final.
- Obtener el estado estacionario resolviendo el problema de valor propio resultante.
- Resolver para cada paso de tiempo el sistema algebraico resultante hasta cubrir el intervalo de interés para la variable tiempo.

3.1 DISCRETIZACIÓN ESPACIAL

Para ilustrar la discretización espacial de las ecuaciones de la cinética obtenidas en el Capítulo 2, Ecs. (2.7), se considerará el caso de un solo grupo de energía y un solo grupo de precursores de neutrones retardados, con lo que las ecuaciones correspondientes se escriben como sigue:

$$\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \phi(\vec{r}, t) - \nabla \cdot D(\vec{r}, t) \nabla \phi(\vec{r}, t) + [\Sigma_a(\vec{r}, t) - (1 - \beta) \nu(\vec{r}, t) \Sigma_f(\vec{r}, t)] \phi(\vec{r}, t) = \lambda C(\vec{r}, t) \quad (3.1a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} C(\vec{r}, t) + \lambda C(\vec{r}, t) = \beta \nu(\vec{r}, t) \Sigma_f(\vec{r}, t) \phi(\vec{r}, t) \quad (3.1b)$$

$$\forall \vec{r} \in V; t \in (0, T]$$

donde Σ_a es la sección eficaz de absorción en la posición \vec{r} al tiempo t .

Por otro lado, las condiciones de frontera asociadas a este caso, se definen por:

$$\phi(\vec{r}_e, t) = 0 \quad \forall \vec{r}_e \in \Gamma_1 \quad (3.2a)$$

$$D(\vec{r}_e, t) \nabla \phi(\vec{r}_e, t) \cdot \hat{n}_e = 0 \quad \forall \vec{r}_e \in \Gamma_2 \quad (3.2b)$$

con

$$\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma_e \quad \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset \quad (3.3)$$

y las condiciones iniciales:

$$\phi(\vec{r}, 0) = \phi_0(\vec{r}) \quad (3.4a)$$

$$C(\vec{r}, 0) = \frac{\beta}{\lambda} \nu(\vec{r}, 0) \Sigma_f(\vec{r}, 0) \phi_0(\vec{r}) \quad (3.4b)$$

$$\forall \vec{r} \in V$$

donde $\phi_0(\vec{r})$ es la solución de la ecuación de difusión

$$-\nabla \cdot D(\vec{r}, 0) \nabla \phi_0(\vec{r}) + \Sigma_a(\vec{r}, 0) \phi_0(\vec{r}) = \frac{1}{k} \nu(\vec{r}, 0) \Sigma_f(\vec{r}, 0) \phi_0(\vec{r}) \quad (3.5)$$

La discretización espacial de las ecuaciones anteriores, se llevará a cabo mediante la aplicación del método de elemento finito semi-discreto de Galerkin para el caso dependiente del tiempo, Ec. (3.1) y el método de elemento finito de Galerkin en el caso estacionario, Ec. (3.5) [4]. Estos están basados en el método de residuos pesados, para el que se construye una aproximación ϕ para el flujo de neutrones junto con la selección de una función de peso ω , que bajo la definición de un producto interno dado, se pide que residuo y función de peso sean ortogonales. En la siguiente sección se describen los detalles de estos métodos.

3.1.1 MÉTODO DE GALERKIN

En el caso estacionario la ecuación de difusión que se discretizará espacialmente es la Ec. (3.5). Como ya se mencionó, primero se debe proveer una aproximación ϕ para el flujo de neutrones ϕ_0 . Una vez proporcionada ϕ se define el residuo de la Ec. (3.5) para dicha aproximación de ϕ_0 como sigue:

$$R[\phi] = -\nabla \cdot D(\vec{r}, 0) \nabla \phi(\vec{r}) + \Sigma_a(\vec{r}, 0) \phi(\vec{r}) - \frac{1}{k} \nu(\vec{r}, 0) \Sigma_f(\vec{r}, 0) \phi(\vec{r}) \quad (3.6)$$

el resultado inmediato es que si φ fuera justamente ϕ_0 , entonces el residuo sería idéntico a cero. Dado que esto no es posible en lo general, el residuo será distinto de cero si φ no es idéntica a ϕ_0 . Ante esto, el método de residuos pesados impone que el residuo sea ortogonal a una función de peso conocida $\omega(\vec{r})$, es decir:

$$\int_V \omega(\vec{r})R[\varphi]d\vec{r} = 0 \quad (3.7a)$$

o, sustituyendo el residuo dado por la Ec. (3.6):

$$\int_V \omega(\vec{r})[-\nabla \cdot D(\vec{r},0)\nabla\varphi(\vec{r}) + \Sigma_a(\vec{r},0)\varphi(\vec{r}) - \frac{1}{k}\nu(\vec{r},0)\Sigma_f(\vec{r},0)\varphi(\vec{r})]d\vec{r} = 0 \quad (3.7b)$$

Integrando por partes y tomando en cuenta las condiciones de frontera se obtiene la siguiente ecuación:

$$\int_V [D(\vec{r},0)\nabla\omega(\vec{r}) \cdot \nabla\varphi(\vec{r}) + \Sigma_a(\vec{r},0)\omega(\vec{r})\varphi(\vec{r}) - \frac{1}{k}\nu(\vec{r},0)\Sigma_f(\vec{r},0)\omega(\vec{r})\varphi(\vec{r})]d\vec{r} = 0 \quad (3.8)$$

que se conoce como la formulación débil del problema, ya que en esta aparecen derivadas de menor orden que las presentes en la Ec. (3.5). Esta ecuación puede ser reescrita como:

$$A(\omega, \varphi) = \frac{1}{k}B(\omega, \varphi) \quad (3.9)$$

donde

$$A(\omega, \varphi) = \int_V [D(\vec{r},0)\nabla\omega(\vec{r}) \cdot \nabla\varphi(\vec{r}) + \Sigma_a(\vec{r},0)\omega(\vec{r})\varphi(\vec{r})]d\vec{r} \quad (3.10)$$

$$B(\omega, \varphi) = \int_V \nu(\vec{r}, 0) \Sigma_f(\vec{r}, 0) \omega(\vec{r}) \varphi(\vec{r}) d\vec{r} \quad (3.11)$$

Las Ecs. (3.10) y (3.11) son útiles, ya que indican que para que (3.9) tenga solución, las funciones φ y ω deben ser de cuadrado integrables hasta sus derivadas parciales de primer orden en cada una de las variables espaciales contenidas en \vec{r} , es decir:

$$\varphi, \omega \in H_0^1 = \left\{ u(\vec{r}) \mid \int_V u(\vec{r})^2 d\vec{r} < \infty, \int_V u_x(\vec{r})^2 d\vec{r} < \infty, \int_V u_y(\vec{r})^2 d\vec{r} < \infty, \int_V u_z(\vec{r})^2 d\vec{r} < \infty, u(\vec{r}_e) = 0, \vec{r}_e \in \Gamma_1 \right\} \quad (3.12)$$

Es importante resaltar que dada la bi-linealidad de $A(\omega, \varphi)$ y $B(\omega, \varphi)$, ω y φ indistintamente deben cumplir las condiciones ya mencionadas, las que incluyen satisfacer la condición de frontera esencial en Γ_1 . La condición de frontera dada en Γ_2 se satisface de manera natural tanto por la función φ como por la función ω . El espacio de funciones H_0^1 es de dimensión infinita, lo que en términos prácticos implicaría resolver un problema, en este caso el problema débil planteado por la Ec. (3.8), de igual o mayor complejidad al problema fuerte. Por esta razón, en lugar de buscar funciones φ y ω en dicho espacio, se buscan aproximaciones ϕ_h cuadrado integrables hasta sus derivadas parciales de primer orden en cada una de las variables espaciales contenidas en \vec{r} pero en espacios de dimensión finita para lo cual la discretización espacial de las Ecs. (3.1) estará relacionada con la discretización del dominio V . Esto dará como resultado un dominio regular tipo unión de rectángulos V_e :

$$V \cong V_h = \bigcup_{e=1}^E V_e \quad (3.13)$$

donde D , Σ_a y $\nu\Sigma_f$ son constantes sobre cada V_e . De esta manera, para proceder a la discretización del problema se propondrán funciones ϕ_h y ω tales que:

$$\{\omega, \phi_h\} \in \mathcal{S}_1^h \subset H_0^1(V) \quad (3.14)$$

Una forma de proponer a ϕ_h es la que plantea el método de elementos finitos donde ésta función es aproximada mediante una combinación lineal de la forma:

$$\phi_h(\vec{r}) = \sum_{l=1}^{N_f} u_l(\vec{r}) \phi_l \quad \forall \vec{r} \in V \quad (3.15)$$

donde

$$u_l(\vec{r}) \quad l=1, \dots, N_f \quad (3.16)$$

son llamadas funciones base, de las cuales hay un total de N_f que están relacionadas con la discretización del dominio V como con los parámetros del flujo de neutrones que se desean interpolar, $\phi_l(\vec{r})$, $l=1, \dots, N_f$, pudiendo ser éstos, en el caso de tres dimensiones, el valor del flujo de neutrones en puntos específicos (interpolación de Lagrange), su derivada o derivadas parciales (interpolación de Hermite) o promedios o momentos de Legendre (interpolación Nodal) o combinaciones de ellos. El conjunto $\{u_l\}$ constituye así una base de dimensión N_f para el subespacio S_1^h .

El siguiente paso en el método de residuos pesados es la selección de la función de peso $\omega(\vec{r})$. Su selección conduce a diferentes métodos de elemento finito, siendo uno de ellos el Método de Galerkin, en el cual esta función de peso es reemplazada por cada una de las funciones base de la aproximación ϕ_h , es decir, $\omega(\vec{r})$ es reemplazada por $u_l(\vec{r})$, $l=1, \dots, N_f$. Al llevar a cabo esto, la Ec. (3.8) se convierte en un problema de valor propio discreto dado por:

$$\mathbf{A} \underline{\phi} = \frac{1}{k} \mathbf{B} \underline{\phi} \quad (3.17)$$

donde \mathbf{A} y \mathbf{B} son matrices $N_f \times N_f$ cuyos elementos están dados por:

$$a_{ij} = \int_V [D(\vec{r}, 0) \nabla u_i(\vec{r}) \cdot \nabla u_j(\vec{r}) + \Sigma_a(\vec{r}, 0) u_i(\vec{r}) u_j(\vec{r})] d\vec{r} \quad (3.18)$$

$$b_{ij} = \int_V \nu(\vec{r}, 0) \Sigma_f(\vec{r}, 0) u_i(\vec{r}) u_j(\vec{r}) d\vec{r} \quad (3.19)$$

y $\underline{\phi} = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{N_f}]^T$ es el vector de parámetros incógnita o de interpolación empleados. De esta forma el problema fuerte, Ec. (3.9), ha sido convertido en un problema discreto, Ec. (3.17), cuya solución aproximada se obtiene recurriendo a un método numérico como el método de las potencias, el cual proporciona el valor propio dominante de la matriz $\mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}$, también conocido como factor efectivo de multiplicación de neutrones, k_{eff} , así como el correspondiente vector propio o flujo crítico de neutrones, $\underline{\phi}_0$. Una versión mejorada del método de las potencias es el método de Wielandt[†], el cual proporciona a k_{eff} y a $\underline{\phi}_0$ en un número reducido de iteraciones.

[†] H. Wielandt, "Bestimmung höheren Eigenwerte durch Gebrochene Iteration", Bericht der Aerodynamischen Versuchsanstalt Gottingen, Report 44/J/37 (1944).

CAPÍTULO 4

DISCRETIZACIÓN ESPACIAL DE LAS ECUACIONES DE LA CINÉTICA DEL REACTOR: CASO MULTIGRUPOS

Como se verá en este capítulo, la discretización en espacio y tiempo de las ecuaciones de la cinética de reactores en el caso de multigrupos conduce a sistemas algebraicos de orden considerable, dependiendo del número de grupos de energía y de la malla tri-dimensional que se utilice. El sistema algebraico resultante es no-simétrico, lo que demanda el uso de algún algoritmo numérico que permita resolverlo con relativa facilidad. El método seleccionado fue el método BICGSTAB, el cual es ampliamente usado en diversas áreas de la ingeniería en donde se resuelven ecuaciones similares a las de difusión de neutrones, siguiendo un procedimiento semejante al que se implementa en [5]. Una descripción de las principales etapas para llevar a cabo la discretización, es la siguiente:

- Discretización del dominio: la ecuación diferencial está subdividida en subdominios simples llamados elementos, comúnmente, estos son un número finito de ellos. Dentro de cada elemento se formulan funciones de interpolación, en términos de parámetros asociados a puntos discretos o nodos sobre la frontera de los elementos.
- Ensamblar las ecuaciones algebraicas en el espacio apropiado, en la matriz global (tipo banda) la cual es no-simétrica para $G > 1$.
- Asignar las condiciones de frontera pre-escritas por el problema en la matriz final.
- Resolver el problema de valor propio para obtener la k_{eff} y el flujo de neutrones respectivo e inmediatamente las secciones de fisión críticas, así como las concentraciones iniciales de precursores de neutrones retardados.

Después se deben realizar los siguientes dos pasos de manera recursiva, hasta cubrir el intervalo de interés en la variable tiempo.

- Solucionar el sistema de ecuaciones resultante para cada paso de tiempo para obtener el flujo de neutrones al tiempo t_{k+1} dados el flujo de neutrones, al tiempo y las concentraciones del tiempo t_k .
- Obtener las concentraciones de precursores de neutrones retardados al tiempo t_{k+1} .

4.1 DISCRETIZACIÓN ESPACIAL

El método semi-discreto de Galerkin es semejante al descrito en el capítulo anterior siendo las diferencias: a) que ahora se tienen dos residuos, uno por cada una de las ecuaciones a resolver y b) en que ahora se tienen dos aproximaciones, una para el flujo de neutrones y la otra para la concentración de precursores de neutrones retardados, que también dependen del tiempo. Por lo tanto el problema de la discretización espacial consiste ahora en encontrar ϕ_h y C_h tales que:

$$\left(u_l, \frac{1}{v} \frac{\partial \phi_h}{\partial t} \right) + (D \nabla \phi_h, \nabla u_l) + \left(u_l, [\Sigma_a - (1 - \beta) v \Sigma_f] \phi_h \right) = (u_l, \lambda C_h) \quad l = 1, \dots, N_f \quad (4.1a)$$

$$\left(v_m, \frac{\partial C_h}{\partial t} \right) + (v_m, \lambda C_h) = (v_m, \beta v \Sigma_f \phi_h) \quad m = 1, \dots, N_p \quad (4.1b)$$

$$\forall \vec{r} \in V; t \in (0, T]$$

donde ϕ_h y C_h son combinaciones lineales dadas por las ecuaciones (4.2a) y (4.2b):

$$\phi_h(\vec{r}, t) = \sum_{l=1}^{N_f} u_l(\vec{r}) \phi_l(t) \quad (4.2a)$$

$$C_h(\vec{r}, t) = \sum_{m=1}^{N_p} v_m(\vec{r}) C_m(t) \quad (4.2b)$$

$$\forall \vec{r} \in V; t \in (0, T]$$

Como resultado, se obtiene un sistema de $N_f + N_p$ ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas que tienen al tiempo como única variable independiente. En la siguiente sección se mostrará la forma en que se realizará la discretización en tiempo.

4.2 DISCRETIZACIÓN DE LA VARIABLE TIEMPO

Una vez definida la discretización espacial, mediante el método θ , se describe la discretización de la variable tiempo y algunas técnicas que resultan de este método.

4.2.1 MÉTODO θ DE INTEGRACIÓN EN TIEMPO

Este método consiste en aproximar la integral de una función $f(t)$ en el intervalo de tiempo $[t_j, t_{j+1}]$ como se muestra a continuación:

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} f(t) dt \cong h_j [\theta f_{j+1} + (1-\theta) f_j] \quad (4.3)$$

con

$$f_{j+1} \equiv f(t_{j+1}), \quad f_j \equiv f(t_j), \quad h_j = t_{j+1} - t_j \quad (4.4)$$

donde

θ es el parámetro de integración.

f es una función arbitraria, por ejemplo el flujo de neutrones.

Para el caso de estudio tratado, se define θ_f y θ_p como los parámetros de integración para las funciones que representan al flujo de neutrones y a la concentración de precursores, respectivamente.

4.2.2 INTEGRACIÓN RESPECTO AL TIEMPO DE LAS ECUACIONES DE DIFUSIÓN EN MULTIGRUPOS

La discretización se efectúa en el intervalo $(0, T]$, para ello, se realiza la integración sobre el intervalo de tiempo $[t_j, t_{j+1}]$ de las siguientes ecuaciones:

$$\frac{1}{v_g} M_f \frac{d}{dt} \phi_g(t) = -K_g(t) \phi_g(t) - \sum_{g'=1}^G S_{g \rightarrow g'}(t) \phi_{g'}(t) + (1-\beta) \sum_{g'=1}^G F_{gg'}(t) \phi_{g'}(t) + \sum_{i=1}^{I_p} F_{gi} C_i(t) \quad (4.5a)$$

$g = 1, \dots, G$

$$M_p \frac{d}{dt} C_i(t) = \sum_{g=1}^G P_{ig'}(t) \phi_{g'}(t) - \lambda_i M_p C_i(t) \quad i = 1, \dots, I_p \quad (4.5b)$$

donde

$$\phi_g(t) = [\phi_{g,1}(t), \dots, \phi_{g,N_f}(t)]^T \quad g = 1, \dots, G \quad (4.6a)$$

$$C_i(t) = [C_{i,1}(t), \dots, C_{i,N_p}(t)]^T \quad i = 1, \dots, I_p \quad (4.6b)$$

A las que al aplicarse la aproximación dada por (4.3), se obtiene el siguiente sistema:

$$D_g^{j+1} \phi_g^{j+1} + \sum_{g'=1}^G T_{gg'}^{j+1} \phi_{g'}^{j+1} + \sum_{i=1}^{I_p} F_{gi} C_i^{j+1} = S_g^j \quad g = 1, \dots, G \quad (4.7a)$$

$$\sum_{g=1}^G P_{ig'}^{j+1} \phi_{g'}^{j+1} + \Lambda_i C_i^{j+1} = S_i^j \quad i = 1, \dots, I_p \quad (4.7b)$$

donde

$$\phi_g^{j+1} = \phi_g(t_{j+1}), \quad \phi_g^j = \phi_g(t_j) \quad (4.8a)$$

$$C_i^{j+1} = C_i(t_{j+1}), \quad C_i^j = C_i(t_j), \quad h_j = t_{j+1} - t_j \quad (4.8b)$$

$$D_g^{j+1} = \frac{M_f}{V^g} + h_j \theta_f K_g^{j+1} \quad (4.9)$$

$$T_{gg'}^{j+1} = h_j \theta_f [S_{g' \rightarrow g}^{j+1} - (1 - \beta) F_{gg'}^{j+1}] \quad (4.10)$$

$$F_{gi} = -h_j \theta_p F_{gi} \quad (4.11)$$

$$\Lambda_i = (1 + h_j \theta_p \lambda_i) M_p \quad (4.12)$$

$$P_{ig'}^{j+1} = -h_j \theta_p P_{ig'}^{j+1} \quad (4.13)$$

$$\zeta_g^j = \left[\frac{M_f}{V^g} - h_j (1 - \theta_f) K_g^j \right] \phi_g^j - h_j (1 - \theta_f) \sum_{g'=1}^G [S_{g' \rightarrow g}^j - (1 - \beta) F_{gg'}^j] \phi_{g'}^j + h_j (1 - \theta_p) \sum_{i=1}^{I_p} F_{gi} C_i^j \quad (4.14)$$

$$S_i^j = h_j (1 - \theta_f) \sum_{g'=1}^G P_{ig'}^j \phi_{g'}^j + [1 - h_j (1 - \theta_p)] M_p C_i^j \quad (4.15)$$

donde θ_f , θ_p y $\theta_{f,k}$ son los parámetros θ de integración en tiempo para los términos de masa del flujo de neutrones (M_f), de la concentración de precursores (M_p) y de rigidez del flujo neutrónico (K_g).

Otra manera de expresar las ecuaciones (4.7), es mediante la aplicación de las siguientes definiciones:

$$\Psi_{j+1} = [\phi_{j+1}^1, \dots, \phi_{j+1}^G, C_{I_1}^{j+1}, \dots, C_{I_p}^{j+1}]^T \quad (4.16)$$

$$S_j = [S_j^1, \dots, S_j^G, S_{I_1}^j, \dots, S_{I_p}^j]^T \quad (4.17)$$

resultando la siguiente representación matricial:

$$A_{j+1} \Psi_{j+1} = S_j \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (4.18)$$

donde A_{j+1} es una matriz de orden $N_f G + N_p I_p$ y tiene la estructura siguiente:

$$A_{j+1} = \begin{bmatrix} D_1^{j+1} + T_{11}^{j+1} & T_{12}^{j+1} & \dots & T_{1G}^{j+1} & F_{11} & F_{12} & \dots & F_{1I_p} \\ T_{21}^{j+1} & D_2^{j+1} + T_{22}^{j+1} & \dots & T_{2G}^{j+1} & F_{21} & F_{22} & \dots & F_{2I_p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ T_{G1}^{j+1} & T_{G2}^{j+1} & \dots & D_G^{j+1} + T_{GG}^{j+1} & F_{G1} & F_{G2} & \dots & F_{GI_p} \\ P_{11}^{j+1} & P_{12}^{j+1} & \dots & P_{1G}^{j+1} & A_1 & & & \\ P_{21}^{j+1} & P_{22}^{j+1} & \dots & P_{2G}^{j+1} & & A_2 & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & & \dots & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & & & & \\ P_{I_p 1}^{j+1} & P_{I_p 2}^{j+1} & \dots & P_{I_p G}^{j+1} & & & & A_{I_p} \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

No se debe pasar por alto que la ecuación (4.18) representa un esquema en el que dada una condición inicial ϕ_0 , se puede calcular el flujo de neutrones, así como las concentraciones de precursores para cada paso de tiempo h_j , $j = 0, 1, 2, \dots$. Ahora entonces, la matriz A_{j+1} resultante, es de orden $(N_f G + N_p I_p) \times (N_f G + N_p I_p)$.

Para obtener la solución del sistema (4.18), el cálculo del flujo de neutrones y el de las concentraciones de precursores de neutrones retardados deben de realizarse por separado, de manera que se reduzcan las cantidades de cálculos a ejecutar, ya que la matriz no es simétrica (para $G > 1$).

Para ello, si se despeja \mathcal{C}_i^{j+1} de la ecuación (4.7b), se multiplica por F_{gi} y se suma sobre todos los valores de i , se tiene:

$$\sum_{i=1}^{I_p} F_{gi} \mathcal{C}_i^{j+1} = \sum_{i=1}^{I_p} F_{gi} \Lambda_i^{-1} \mathcal{S}_i^j - \sum_{g'=1}^G \sum_{i=1}^{I_p} F_{gi} \Lambda_i^{-1} P_{ig'}^{j+1} \phi_{g'}^{j+1} \quad (4.20)$$

que sustituyéndolo en (4.7a), se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$D_g^{j+1} \phi_g^{j+1} + \sum_{g'=1}^G T_{gg'}^{f,j+1} \phi_{g'}^{j+1} = \mathcal{S}_g^{f,j} \quad g=1, \dots, G \quad (4.21)$$

donde

$$T_{gg'}^{f,j+1} = T_{gg'}^{j+1} - \sum_{i=1}^{I_p} F_{gi} \Lambda_i^{-1} P_{ig'} \quad (4.22)$$

$$\mathcal{S}_g^{f,j} = \mathcal{S}_g^j - \sum_{i=1}^{I_p} F_{gi} \Lambda_i^{-1} \mathcal{S}_i^j \quad (4.23)$$

que en notación matricial, (4.21) puede representarse como:

$$B_{j+1} \Phi_{j+1} = \mathcal{Q}_j \quad (4.24)$$

donde

$$\Phi_{j+1} = [\phi_1^{j+1}, \dots, \phi_G^{j+1}]^T, \quad \mathcal{Q}_j = [\mathcal{S}_1^{f,j}, \dots, \mathcal{S}_G^{f,j}]^T \quad (4.25)$$

siendo la matriz B_{j+1} resultante de orden $N_f G \times N_f G$, la cual tiene la siguiente forma:

$$B_{j+1} = \begin{pmatrix} D_1^{j+1} + T_{11}^{j+1} & T_{12}^{j+1} & \dots & T_{1G}^{j+1} \\ T_{21}^{j+1} & D_2^{j+1} + T_{22}^{j+1} & \dots & T_{2G}^{j+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ T_{G1}^{j+1} & T_{G2}^{j+1} & \dots & D_G^{j+1} + T_{GG}^{j+1} \end{pmatrix} \quad (4.26)$$

CAPÍTULO 5

MÉTODOS NODALES

La reproducción de los fenómenos que ocurren dentro de los reactores nucleares, es una actividad que ha tenido un crecimiento importante en los últimos años, tal es el caso del estudio del comportamiento de los neutrones en el núcleo del reactor. Este análisis inicia simulando las condiciones de un reactor nuclear en estado estacionario, posteriormente, se continúa el estudio verificando el comportamiento del reactor en función del tiempo, a través de la potencia del mismo.

Los primeros estudios planteaban una partición del núcleo del reactor en regiones mínimas, consideradas casi de geometría uniforme, esto basado en la composición de los materiales. Debido a esta limitante, se inició entonces la aplicación de Métodos de Diferencias Finitas, por ejemplo. Con el paso del tiempo, nuevas metodologías más eficientes como los Métodos de Elemento Finito, fueron introducidos en el estudio de los reactores nucleares, al igual que los Métodos de Elementos Nodales, que mediante una aproximación de una función continua (polinomial), por partes sobre una malla discretizada, se logra obtener una aproximación de la solución de una función desconocida. La metodología y su aplicación de los métodos nodales, son la base del contenido del presente capítulo, mostrando la solución de la ecuación de difusión con dependencia en tiempo.

5.1 MÉTODOS NODALES

Los métodos nodales fueron introducidos en cálculos numéricos de reactores a fines de la década de los 70's [6, 7, 8, 9]. Los esquemas con momentos discontinuos débiles fueron introducidos por Lesaint y Raviart [9] en una y dos dimensiones.

Un método nodal tiene como particularidad, que sobre una celda, los parámetros básicos son momentos de celda, los cuales, generalmente son definidos por la física del problema a analizar.

La unión de las celdas generan el dominio V , en donde las propiedades físicas pueden ser homogeneizadas. Por lo que en el cálculo numérico de reactores nucleares, la solución de la ecuación de difusión en multigrupos, es posible discretizarla mediante el uso de una malla gruesa.

Las incógnitas que se determinan, dado un método nodal particular, son los momentos de Legendre en cada una de las caras y dentro de la celda. En la Figura 5.1 se ejemplifica una celda en tres dimensiones correspondiente a una subregión de todo el dominio, por lo que la solución debe cumplir con ciertas condiciones de continuidad o de frontera, dado que se pueden tener colindancias con celdas vecinas o que al menos una de sus caras, sea parte de la frontera del dominio de la solución.

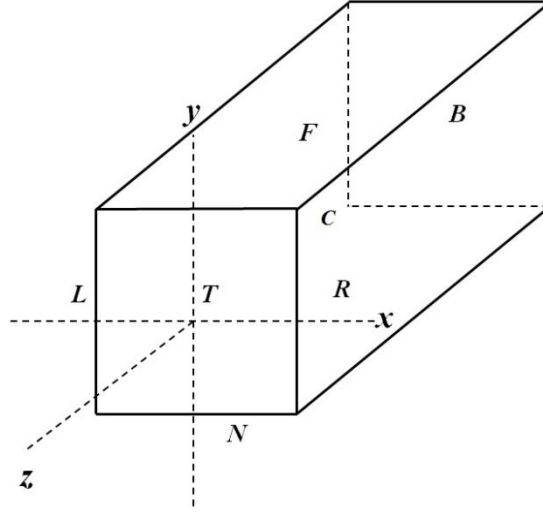


Figura 5.1. Representación de una celda (x, y, z) en coordenadas rectangulares.

De donde L, R, N, F, B y T son las iniciales de las palabras en inglés Left, Right, Near, Far, Bottom y Top, para cada una de las caras, respectivamente y C indica el momento de celda.

La potencialidad de los métodos nodales, consiste en que la función base por determinar numéricamente, esté expresada en términos de funciones base nodales, por lo que, de la Figura 5.1, los momentos de cara y celda de la función $f(x, y, z)$, están definidos por las siguientes expresiones [6]:

$$m_L^{ij} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} P_i(y) P_j(z) f(-1, y, z) dy dz / N_i N_j \quad (5.1)$$

$$m_R^{ij} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} P_i(y) P_j(z) f(+1, y, z) dy dz / N_i N_j \quad (5.2)$$

$$m_N^{ij} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} P_i(x) P_j(z) f(x, -1, z) dx dz / N_i N_j \quad (5.3)$$

$$m_F^{ij} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} P_i(x) P_j(z) f(x, +1, z) dx dz / N_i N_j \quad (5.4)$$

$$m_B^{ij} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} P_i(x) P_j(y) f(x, y, -1) dx dy / N_i N_j \quad (5.5)$$

$$m_T^{ij} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} P_i(x) P_j(y) f(x, y, +1) dx dy / N_i N_j \quad i, j = 0, \dots, l \quad (5.6)$$

$$m_C^{ijk} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} P_i(x) P_j(y) P_k(z) f(x, y, z) dx dy dz / N_i N_j N_k \quad i, j, k = 0, \dots, l \quad (5.7)$$

De las definiciones anteriores, la función $f(x, y, z)$ está definida en términos de las funciones base o bien, celda por celda, la cual hace referencia a la celda unitaria $V_r = [-1, +1] \times [-1, +1] \times [-1, +1]$. Además $P_{i,j,k}$ corresponde a los polinomios de Legendre de i -ésimo grado, dichos polinomios, tienen las propiedades de ortogonalidad y paridad. Como caso de ejemplo, a continuación se muestran los polinomios para $i = 0, 1, 2, \dots$ (Ec. 5.8) y sus propiedades (Ec. 5.9) en la variable x .

$$P_0(x) = 1; \quad P_1(x) = x; \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \quad (5.8)$$

$$\int_{-1}^{+1} P_i(x) P_j(x) dx = N_i \delta_{ij}, \quad P_i(+1) = 1, \quad P_i(-1) = (-1)^i \quad (5.9)$$

5.2 MÉTODO NODAL RTN-0

De los métodos nodales introducidos por Hennart [10], el de índice de menor orden se denomina RTN-0 (Raviart-Thomas-Nédelec) [11, 12], el cual se obtiene al elegir $l = 0$, por lo que $i, j, k = 0$.

Este genera simplicidad en el número de incógnitas a determinar, ya que la cantidad de ellas, se ve reducida considerablemente. Tomando como $l=0$, el número de incógnitas para una celda es **7**: una por cada cara y una para el promedio de la celda. Con $l=1$, el número de incógnitas para una celda será **32**: cuatro por cada cara y ocho para los momentos de celda.

En el caso más simple, en donde $l=0$, las funciones base para el método RTN-0 son:

$$u_L^{00}(x, y, z) = -\frac{1}{2}(P_{100} - P_{200}) \quad (5.10)$$

$$u_R^{00}(x, y, z) = +\frac{1}{2}(P_{100} + P_{200}) \quad (5.11)$$

$$u_N^{00}(x, y, z) = -\frac{1}{2}(P_{010} - P_{020}) \quad (5.12)$$

$$u_F^{00}(x, y, z) = +\frac{1}{2}(P_{010} + P_{020}) \quad (5.13)$$

$$u_B^{00}(x, y, z) = -\frac{1}{2}(P_{001} - P_{002}) \quad (5.14)$$

$$u_T^{00}(x, y, z) = +\frac{1}{2}(P_{001} + P_{002}) \quad (5.15)$$

$$u_C^{000}(x, y, z) = P_{000} - P_{200} - P_{020} - P_{002} \quad (5.16)$$

donde

$$P_{ijk}(x, y, z) = P_i(x)P_j(y)P_k(z) \quad (5.17)$$

La representación de la función $f(x, y, z)$ para una celda en particular, tomando en cuenta las funciones base anteriormente definidas, resulta de la siguiente manera:

$$f(x, y, z) = \sum_E f_E^{00} u_E^{00}(x, y, z) + f_C^{000} u_C^{00}(x, y, z) \quad (5.18)$$

donde $E = L, R, N, F, B, T$ y C , mientras que f_E^{00} y f_C^{000} son los valores por determinar, correspondientes a los momentos de Legendre en cada cara de la celda.

5.3 APLICACIONES DEL MÉTODO NODAL RTN-0

En el método de Galerkin, la discretización de las ecuaciones de difusión, lleva implícita la discretización del dominio V en un dominio del tipo unión de celdas. Esta es empleada en el método nodal RTN-0 para determinar las incógnitas de flujo de neutrones, las cuales están localmente asignadas a cada celda, por lo que para una celda en particular, las incógnitas a determinar numéricamente, son el flujo promedio en cada una de las caras de la celda y el flujo promedio de la celda. Lo que nos lleva a la aseveración de que en tres dimensiones, se tienen siete incógnitas locales por cada celda. Las propiedades de las secciones eficaces pueden variar de celda a celda e incluso dentro de la misma celda si se considera el quemado, generando una discontinuidad en la función global.

Debido a que las funciones base que se utilizan, están referenciadas a la celda unitaria $V_r = [-1, +1] \times [-1, +1] \times [-1, +1]$, en donde se hace uso de las funciones de los momentos dadas para el método RTN-0, se deben hacer cambios de variable adecuados para relacionar los cálculos en la celda unitaria con las celdas $V_r = \left[x_{i-1/2}, x_{i+1/2} \right] \times \left[y_{j-1/2}, y_{j+1/2} \right] \times \left[z_{k-1/2}, z_{k+1/2} \right]$.

Los cambios requeridos, son los siguientes:

$$\xi = \frac{2x - (x_{i-1/2} + x_{i+1/2})}{\Delta x_i} \quad \Delta x_i = x_{i-1/2} - x_{i+1/2} \quad (5.19)$$

$$\eta = \frac{2y - (y_{j-1/2} + y_{j+1/2})}{\Delta y_j} \quad \Delta y_j = y_{j-1/2} - y_{j+1/2} \quad (5.20)$$

$$v = \frac{2z - (z_{k-1/2} + z_{k+1/2})}{\Delta z_k} \quad \Delta z_k = z_{k-1/2} - z_{k+1/2} \quad (5.21)$$

$$dx = \frac{\Delta x_i}{2} d\xi \quad dy = \frac{\Delta y_j}{2} d\eta \quad dz = \frac{\Delta z_k}{2} dv \quad (5.22)$$

$$dr = dxdydz = \frac{h_{ijk}}{8} d\xi d\eta dv \quad h_{ijk} = \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k \quad (5.23)$$

Las funciones base nodales definidas por los polinomios de Legendre, Ecs. (5.10) – (5.16), se utilizan para aproximar el flujo de neutrones, lo cual resulta en la solución $\phi(x, y, z)$. En el desarrollo de la solución numérica de las ecuaciones de difusión, aludiendo a una celda, se tienen expresiones como las siguientes:

$$m_{lm} = \int_{V_r} u_l u_m d\vec{r} \quad (5.24)$$

$$k_{x,lm} = \int_{V_r} u_{lx} u_{mx} d\vec{r} \quad (5.25)$$

$$k_{y,lm} = \int_{V_r} u_{ly} u_{my} d\vec{r} \quad (5.26)$$

$$k_{z,lm} = \int_{V_r} u_{lz} u_{mz} d\vec{r} \quad (5.27)$$

con

$$K = K_x + K_y + K_z \quad (5.28)$$

Donde $l, m = L, R, N, F, B, T$ y C y los subíndices x, y, z en las funciones base u_l y u_m denotan derivadas parciales.

La expresión (5.24) representa los elementos de la denominada matriz de masa (M); mientras que las Ecs. (5.25), (5.26) y (5.27), sirven para calcular los elementos de la matriz de rigidez (K) (5.28).

CAPÍTULO 6

MÉTODOS NODALES PARA DIFUSIÓN DE NEUTRONES EN GEOMETRÍA HEXAGONAL – Z

La geometría hexagonal es importante en el cálculo de reactores nucleares, puesto que es la geometría de los reactores rápidos de cría (LMFBR, de sus siglas en inglés Liquid Metal Fast Breeder Reactor), de los de alta temperatura (HTGR, de sus siglas en inglés High Temperature Gas-Cooled Reactor) y del concepto soviético de agua presurizada (VVER, de sus siglas en ruso Vadá Vadá Energeticheski Reactor). No es de sorprenderse que los métodos nodales con integración transversal adaptados a la geometría hexagonal hayan sido propuestos desde hace largo tiempo (ver por ejemplo Lawrence [13], Gadó y Schmidt [14]). Quizá los métodos mejor conocidos son los implementados en DIF3D [15, 16] y en HEXNOD [17]. Ambos carecen del rigor matemático necesario por razones que son debidas esencialmente a la complejidad de la geometría. A diferencia de la geometría cartesiana, la geometría hexagonal sufre dos desventajas: no es tensorizable y un hexágono no puede ser subdividido en hexágonos más pequeños. Existe por lo tanto una dificultad intrínseca para encontrar aproximaciones bidimensionales para los flujos de neutrones donde las funciones principales sean momentos de flujo y/o de la corriente, los cuales conduzcan ellos mismos fácilmente a la integración transversal. Hay también una dificultad al refinar el cálculo para mejorar la precisión. Para propósitos prácticos DIF3D y HEXNOD dan buenos resultados numéricos en términos del factor efectivo de multiplicación de neutrones, k_{eff} , las tasas de reacción, etc., como se indica en la literatura. Pero estos métodos tienen dificultades para controlar el error y evaluar los flujos localmente.

6.1 MAPEO DEL DOMINIO

En una serie de artículos, Chao y colaboradores [18, 19], sugieren eliminar las dificultades de realizar la integración transversal en geometría hexagonal, al llevar a cabo un mapeo conforme del hexágono en un cuadrado y luego trabajar sobre el cuadrado. Esta idea ha sido implementada en el código PANTHER [20]. Sin embargo, el mapeo conforme de un hexágono en un cuadrado trae algunas nuevas dificultades, por ejemplo, manejar Jacobianos, que son funciones elípticas para determinar la función de escala del mapeo. Una aproximación más simple y más directa, consiste en usar en su lugar la formulación “débil” de las ecuaciones de difusión. El propósito es mostrar que con una transformación adecuada de coordenadas, todos los elementos finitos nodales desarrollados en el marco de referencia de la geometría cuadrangular, incluyendo la integración transversal, pueden ser usados también para geometría hexagonal (ver Hennart y del Valle [21] y Hennart et. al. [22]). Como resultado, esta utilización proporciona una aproximación puntual precisa del flujo en el dominio. Además, el error (en cualquier norma) se vuelve controlable ya sea por refinamiento de la malla dentro de los hexágonos o al incrementar el orden de los esquemas nodales utilizados, siempre y cuando esto sea compatible con las singularidades geométricas de la solución [23]. Estas dos opciones son ampliamente conocidas en el contexto de los elementos nodales. De aquí que se le dé a este esquema numérico el nombre de elemento finito nodal “compuesto” (o macro–elemento), donde el elemento básico se subdivide en varios sub–elementos como se hace con los elementos finitos triangulares compuestos de Hsieh–Clough–Tocher descritos por Ciarlet [24].

Para este estudio, se desarrolla una transformación de coordenadas que mapea un cuarto de hexágono en el cuadrado de referencia $V_r = [-1, +1] \times [-1, +1]$, la cual está basada en la técnica de aproximación (blending) de Gordon y Hall [25, 26], para esto, considérese el trapecoide que se muestra en la Figura 6.1.a. Suponiendo que $2b = c = 2/\sqrt{3}$, este trapecoide es cuarto superior derecho (V_1) de un hexágono V como se muestra en la Figura 6.2 con ejes de simetría a lo largo de x, y . El problema consistiría entonces en buscar un mapeo inyectivo (p. ej. uno a uno) de V_1 en el cuadrado de referencia V_r en el plano (s, t) que se muestra en la Figura 6.1.b.

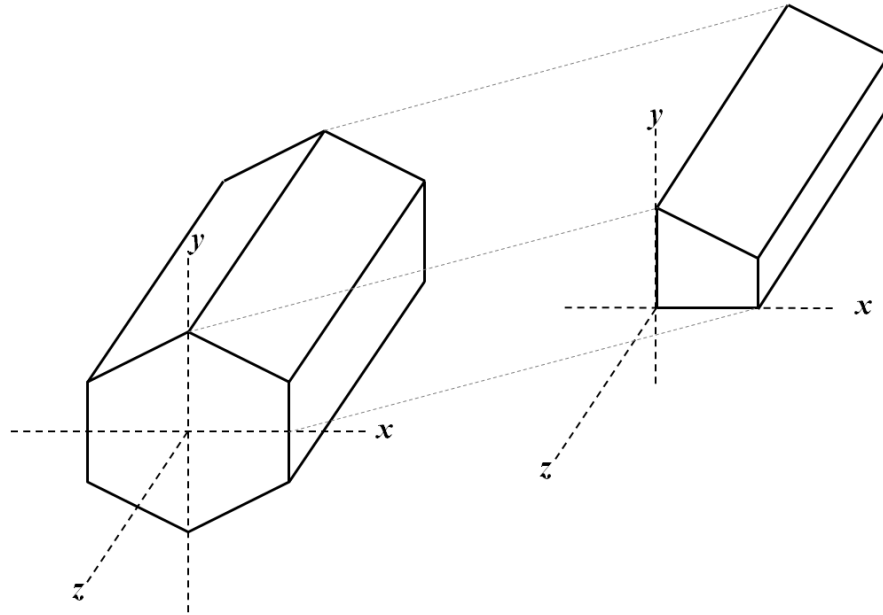


Figura 6.1.a. Transformación de coordenadas para un prisma hexagonal: Un prisma hexagonal es dividido en cuatro cuadrantes, con lo que se logra obtener un prisma de base trapezoidal por cada cuadrante.

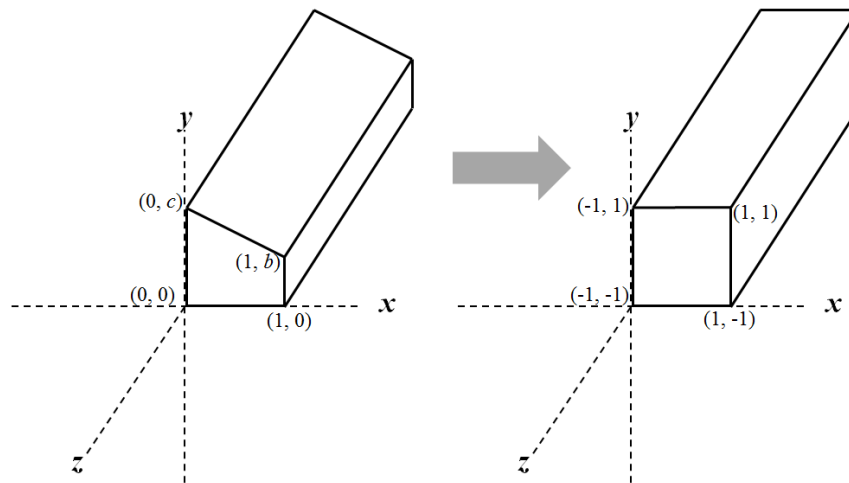


Figura 6.1.b. Transformación de coordenadas para un prisma hexagonal: Aplicando la transformación de coordenadas al prisma de base trapezoidal, el resultado geométrico es un cuadrilátero.

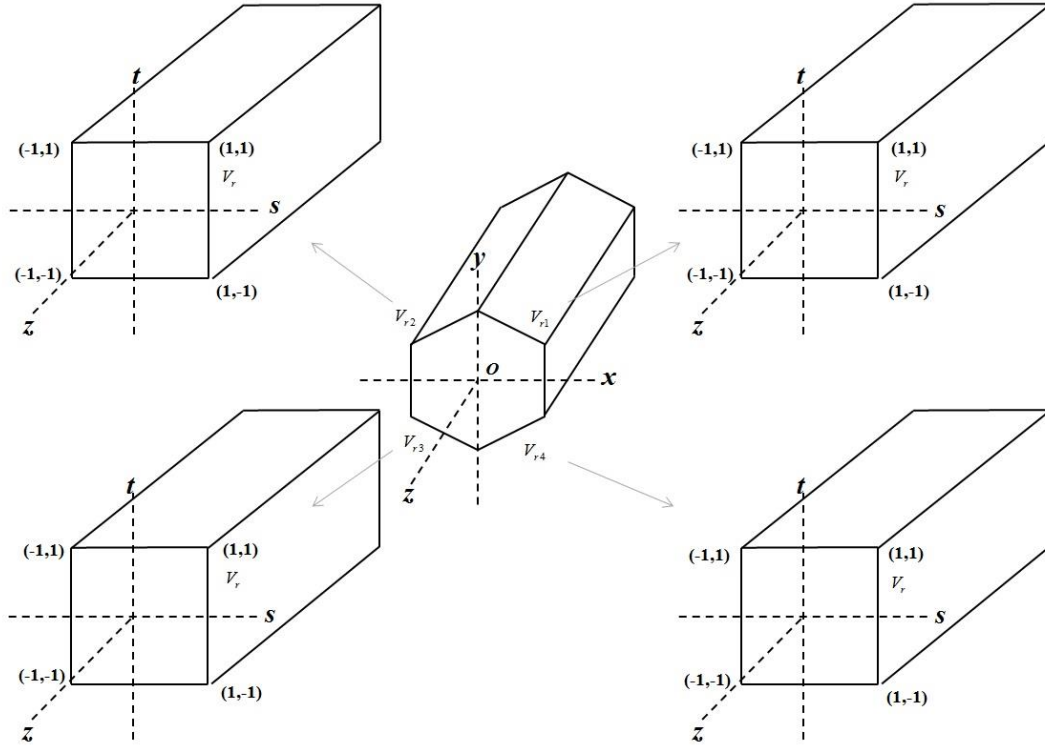


Figura 6.2. Segmentos del prisma hexagonal en cuatro prismas de base trapezoidal.

Una solución simple a este problema está dado por la técnica de interpolación transfinita de Gordon y Hall [25, 26]. A continuación se describirá brevemente el correspondiente algoritmo. Se pueden encontrar más detalles en las referencias citadas así como en Hennart y Mund [28].

Sea $z(s)$ una función continua de una sola variable s , en $[-1,+1]$. Su interpolación de Lagrange $\mathcal{I}z(s)$ en los puntos extremos se puede escribir como:

$$\mathcal{I}z(s) := z(-1)\frac{1-s}{2} + z(+1)\frac{1+s}{2} \quad (6.1)$$

El error de interpolación $\varepsilon(s) := (I - \mathcal{I})z(s)$, donde I es la identidad y \mathcal{I} el operador de interpolación se anulan ± 1 . Para distinguir \mathcal{I}_s , el operador de interpolación en la variable s , de su homólogo en t se introducirá un subíndice en el caso bidimensional.

La fórmula de interpolación lineal bidimensional más simple de cualquier función $z(s,t) \in C^0(V_r)$, donde $C^0(V_r)$ es el conjunto de funciones continuas sobre el cuadrado de referencia, se obtiene usando el producto tensorial $\mathcal{I}^T := \mathcal{I}_s \cdot \mathcal{I}_t$ de los operadores de interpolación. Se tiene entonces:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}^T z(s,t) = & \\ & z(-1,-1) \frac{(1-s)(1-t)}{4} + z(-1,+1) \frac{(1-s)(1+t)}{4} + \\ & z(+1,-1) \frac{(1+s)(1-t)}{4} + z(+1,+1) \frac{(1+s)(1+t)}{4} \end{aligned} \quad (6.2)$$

Y se puede verificar fácilmente que el conjunto de puntos $(s,t) \in V_r$ donde el error de interpolación $\varepsilon^T(s,t) := (I - \mathcal{I}^T)z(s,t)$ se anula y solamente contiene los cuatro vértices de V_r .

El producto tensorial está lejos de ser el único operador de interpolación bidimensional que involucra a \mathcal{I}_s y \mathcal{I}_t . Gordon y Hall han mostrado que entre todos los operadores de interpolación en dos dimensiones, que usan a \mathcal{I}_s y \mathcal{I}_t , el operador que tiene el más grande número de puntos $(s,t) \in V_r$ donde el error de interpolación $\varepsilon^T(s,t) := (I - \mathcal{I}^T)z(s,t)$ se anula, es la suma Booleana $\mathcal{I}^B := \mathcal{I}_s \oplus \mathcal{I}_t$ definida como:

$$\mathcal{I}_s \oplus \mathcal{I}_t := \mathcal{I}_s + \mathcal{I}_t - \mathcal{I}_s \cdot \mathcal{I}_t \quad (6.3)$$

Mientras que el operador con el menor número de puntos, donde el error de interpolación se anula, es precisamente el producto tensorial \mathcal{I}^T . En su terminología, Gordon y Hall usan las palabras “maximal” y “minimal” para calificar los operadores \mathcal{I}^B y \mathcal{I}^T , respectivamente.

La función de interpolación asociada a \mathcal{I}^B está dada explícitamente usando (6.1) y (6.2) de donde se obtiene:

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}^B z(s,t) &:= \\
& z(-1,t) \frac{1-s}{2} + z(+1,t) \frac{1+s}{2} + \\
& z(s,-1) \frac{1-t}{2} + z(s,+1) \frac{1+t}{2} - \mathcal{I}^T z(s,t)
\end{aligned} \tag{6.4}$$

Con un poco de álgebra, se encuentra que el conjunto de precisión de la suma Booleana \mathcal{I}^B está hecho de la frontera de V_r . En otros términos, se tiene idénticamente:

$$\mathcal{I}^B z(s, \pm 1) = z(s, \pm 1) \quad y \quad \mathcal{I}^B z(\pm 1, t) = z(\pm 1, t) \tag{6.5}$$

Verificándose la propiedad de interpolación sobre un conjunto continuo de puntos que son precisamente los puntos de la frontera. Esta es la razón por lo que a ésta técnica también se le conoce como interpolación “transfinita”.

La propiedad expresada por (6.5) es exactamente lo que se necesita para generar una malla en un dominio bidimensional V con fronteras curvadas dividida en cuatro segmentos. Suponiendo que $z(s,t)$ es una función vectorial desconocida con dos componentes $z := [x(s,t), y(s,t)]^T$, y que mapea V sobre el dominio de referencia V_r entonces esos segmentos de frontera de V están bien definidos y pueden ser parametrizados con un solo grado de libertad.

Se puede decir arbitrariamente que estos corresponden al siguiente conjunto de relaciones

$$\begin{cases} x_b := x(s, \pm 1), x(\pm 1, t), \\ y_b := y(s, \pm 1), y(\pm 1, t), \end{cases} \quad -1 \leq s, t \leq +1, \tag{6.6}$$

Donde (x_b, y_b) son las coordenadas de un punto localizado sobre la frontera. Haciendo uso de la fórmula de interpolación transfinita (6.4) se podrá sintetizar, en ausencia de cualquier información acerca de $z(s,t)$, al menos una aproximación \tilde{z} que reproduzca exactamente la frontera:

$\tilde{z}(s,t) = \mathcal{I}^B z(s,t)$. En el caso particular del trapecoide mostrado en la Figura 6.1.a, un cálculo directo de la transformación polinomial está dado por:

$$x(s,t) = \frac{1+s}{2} \tag{6.7}$$

$$y(s,t) = c \frac{1+t}{2} + (b-c) \frac{(1+s)(1+t)}{4}$$

con $-1 \leq s, t \leq +1$. La inversión de (6.7) resulta en la expresión racional

$$s(x,y) = 2x - 1 \tag{6.8}$$

$$t(x,y) = \frac{2y}{c + (b-c)} - 1$$

El mapeo local (6.7) – (6.8) se usará ampliamente en la técnica de solución variacional que se describe en la siguiente sección. La Figura 6.3 da un ejemplo de un hexágono con una malla 3×3 generada por una expresión similar a (6.7) en cada uno de sus cuatro cuartos. Las líneas verticales se relacionan con valores constantes de s y las líneas oblicuas con valores constantes de t en la correspondiente partición 3×3 de V_r . Los cuatro hexágonos V_1 a V_4 son indizados en sentido contrario a las manecillas del reloj empezando con el cuarto superior derecho.

La Figura 6.4.a ilustra el caso de una configuración de prismas hexagonales formada por uno central (C) rodeado por dos capas. Mapeando cada cuarto de hexágono sobre el cuadrado de referencia V_r da el dominio cuadrangular representado en la Figura 6.4.b. Nótese que cada macro elemento en la Figura 6.4.b está formado de $4n^2$ (con $n \geq 1$) elementos, donde el caso $n \neq 1$ corresponde a un refinamiento de los cuartos de hexágono en cada prisma.

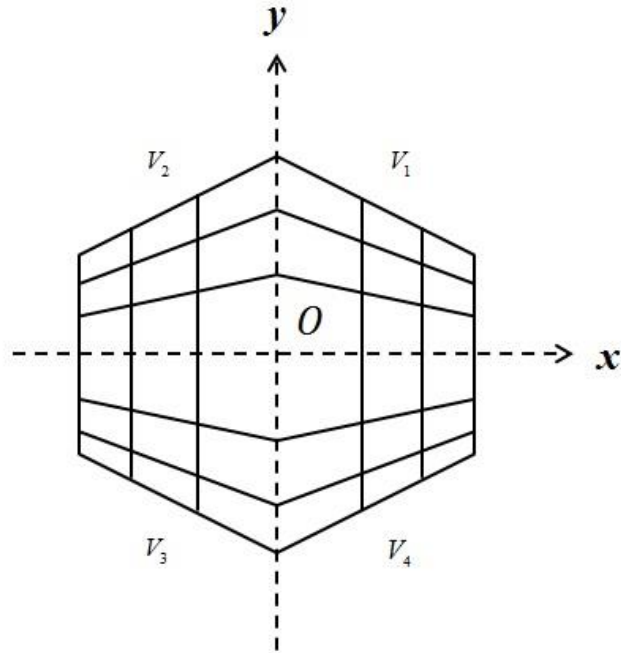


Figura 6.3. Malla local generada tras aplicar la Ec. (6.7), correspondiente al nodo hexagonal.

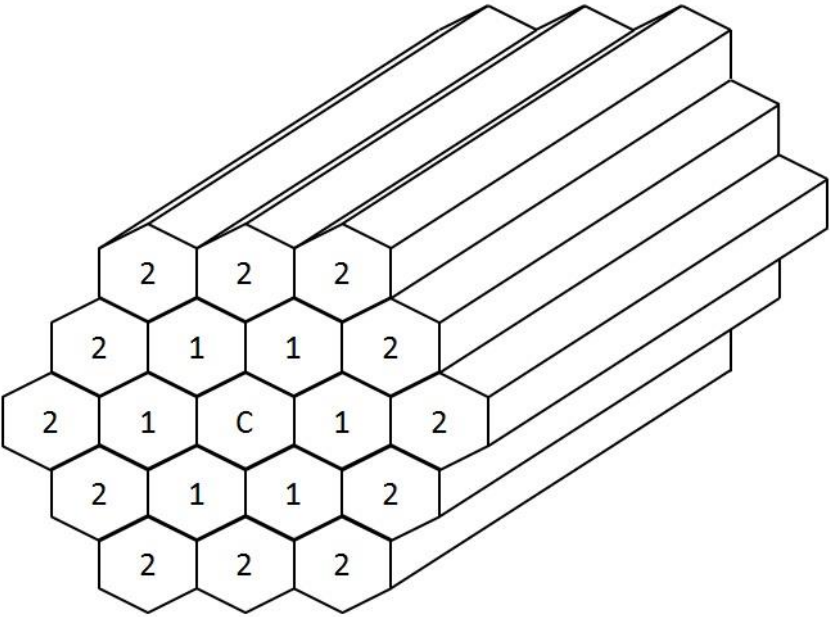


Figura 6.4.a. Arreglo de prismas hexagonales.

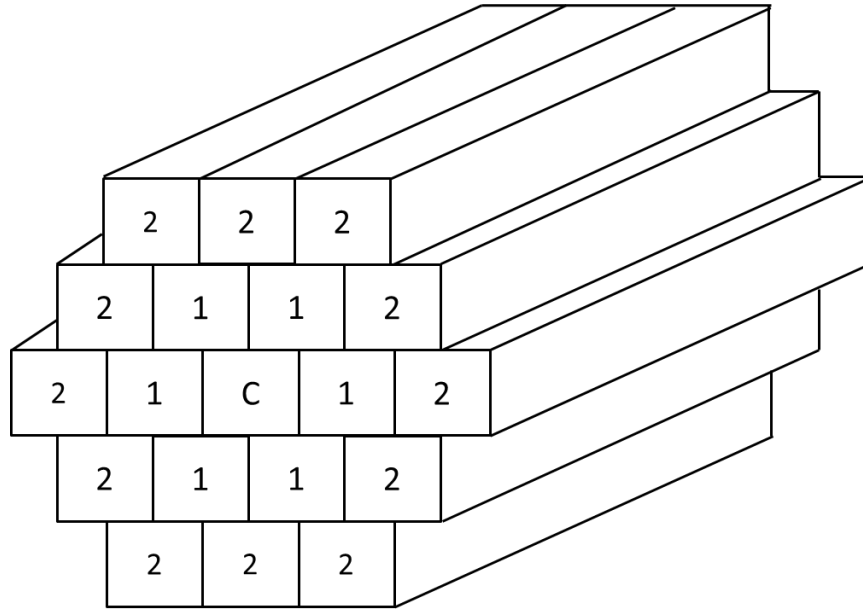


Figura 6.4.b. Su correspondiente dominio cuadrangular.

6.2 SOLUCIÓN VARIACIONAL

La discusión de la técnica de solución variacional, se lleva a cabo sobre la ecuación de difusión para un medio multiplicativo homogéneo, cuyo dominio es un solo hexágono, considerando que la extensión a las ecuaciones de multigrupo sobre un reactor formado por un arreglo de hexágonos es directa [27].

Por simplicidad, se considerará la ecuación de difusión para un problema modelo con coeficientes constantes, medio multiplicativo, sobre un solo hexágono V y con condiciones de frontera de Dirichlet:

$$-D\nabla^2\phi(x, y, z) + \Sigma_a\phi(x, y, z) = \frac{1}{k}v\Sigma_f\phi(x, y, z) \quad x, y, z \in V \quad (6.9)$$

$$\phi(x, y, z) = 0 \quad x, y, z \in \Gamma_e$$

La formulación variacional del problema (6.9) consiste en encontrar la función $\phi(x, y, z) \in S_0^1(V) = H_0^1(V)$ tal que:

$$\mathcal{A}(\phi, \psi) = \frac{1}{k} \mathcal{B}(\phi, \psi) \quad (6.10)$$

donde $\mathcal{A}(\phi, \psi)$ y $\mathcal{B}(\phi, \psi)$ denotan las formas bilineales positivas definidas por:

$$\mathcal{A}(\phi, \psi) = \iiint_V (D\nabla\phi \cdot \nabla\psi + \Sigma_a\phi\psi) dx dy dz \quad (6.11)$$

$$\mathcal{B}(\phi, \psi) = \iiint_V \nu \Sigma_f(\bar{r}, 0) \phi(\bar{r}) \psi(\bar{r}) dx dy dz \quad (6.12)$$

Como es usual $H_0^1(V)$ es el espacio de Sobolev de funciones que tienen derivadas hasta de primer orden en L^2 y que satisfacen las condiciones de Dirichlet homogéneas sobre la frontera.

Partiendo el hexágono en cuatro cuartos y con el eje z , como se sugiere en la Figura 6.1.a, las formas bilineales (Ecs. 6.11 y 6.12), se vuelven:

$$\mathcal{A}(\phi, \psi) = \sum_{l=1}^4 \mathcal{A}_l(\phi, \psi) = \sum_{l=1}^4 \iiint_{V_l} \left[D \left(\frac{\partial\phi}{\partial x} \frac{\partial\psi}{\partial y} + \frac{\partial\phi}{\partial x} \frac{\partial\psi}{\partial y} + \frac{\partial\phi}{\partial z} \frac{\partial\psi}{\partial z} \right) + \Sigma_a\phi\psi \right] dx dy dz \quad (6.13)$$

$$\mathcal{B}(\phi, \psi) = \sum_{l=1}^4 \mathcal{B}_l(\phi, \psi) = \sum_{l=1}^4 \iiint_{V_l} \nu \Sigma_f(\bar{r}, 0) \phi\psi dx dy dz \quad (6.14)$$

donde los subdominios V_ℓ han sido indizados en sentido contrario al de las manecillas del reloj, partiendo del cuarto superior derecho (ver Figura 6.3), Entonces, cada V_ℓ se mapea sobre el cuadrado de referencia V_r en (s, t, z) . Como consecuencia, la funcional bilineal $\mathcal{A}_\ell(\phi, \psi)$ se modifica a:

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{A}}_\ell(\phi, \psi) := & \iiint_{V_r} J \left(\frac{x, y}{s, t} \right) \left[D(s_x^2 + s_y^2) \frac{\partial \phi}{\partial s} \frac{\partial \psi}{\partial s} \right] ds dt dz + \\
& \iiint_{V_r} J \left(\frac{x, y}{s, t} \right) \left[D(s_x t_x + s_y t_y) \left(\frac{\partial \phi}{\partial s} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial s} \right) \right] ds dt dz + \\
& \iiint_{V_r} J \left(\frac{x, y}{s, t} \right) \left[D(t_x^2 + t_y^2) \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial t} + D \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial z} + \Sigma_a \phi \psi \right] ds dt dz
\end{aligned} \tag{6.15}$$

y

$$\tilde{\mathcal{B}}_\ell(\phi, \psi) := \iiint_{V_r} J \left(\frac{x, y}{s, t} \right) \nu_{\Sigma_f}(\vec{r}, 0) \phi \psi ds dt dz \tag{6.16}$$

donde J es el Jacobiano de una transformación polinomial del tipo (6.7):

$$dxdy = J \left(\frac{x, y}{s, t} \right) ds dt \tag{6.17}$$

Un cálculo elemental para cada cuarto, da la expresión compacta:

$$J \left(\frac{x, y}{s, t} \right) = \frac{\sqrt{3}}{24} (3 \mp s) \tag{6.18}$$

donde el signo menos (respectivamente +) se aplica a V_1 y V_4 (respectivamente V_2 y V_3).

Introduciendo las transformaciones apropiadas de coordenadas en (6.13) y (6.14), se obtiene:

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{A}}_\ell(\phi, \psi) = & \iiint_{V_r} \left[D(3-s) \frac{\partial \phi}{\partial s} \frac{\partial \psi}{\partial s} + D(t \pm 1) \left(\frac{\partial \phi}{\partial s} \frac{\partial \psi}{\partial t} + D \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial s} \right) \right] ds dt dz + \\
& \iiint_{V_r} \left[D \left(\frac{(t \pm 1)^2}{3-s} + \frac{12}{3-s} \right) \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial t} + D \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial z} + \Sigma_a \frac{3-s}{4} \phi \psi \right] ds dt dz
\end{aligned} \tag{6.19}$$

$$\tilde{\mathcal{B}}_\ell(\phi, \psi) = \iiint_{V_r} v_{\Sigma_f} \frac{3-s}{4} \phi \psi ds dt dz \quad (6.20)$$

Refiriéndose con (\pm) a los casos $\ell = 1$ y $\ell = 4$, y

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{A}}_\ell(\phi, \psi) = & \iiint_{V_r} \left[D(3+s) \frac{\partial \phi}{\partial s} \frac{\partial \psi}{\partial s} - D(t \pm 1) \left(\frac{\partial \phi}{\partial s} \frac{\partial \psi}{\partial t} + D \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial s} \right) \right] ds dt dz + \\ & \iiint_{V_r} \left[D \left(\frac{(t \pm 1)^2}{3+s} + \frac{12}{3+s} \right) \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial t} + D \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial z} + \Sigma_a \frac{3+s}{4} \phi \psi \right] ds dt dz \end{aligned} \quad (6.21)$$

y

$$\tilde{\mathcal{B}}_\ell(\phi, \psi) = \iiint_{V_r} v_{\Sigma_f} \frac{3+s}{4} \phi \psi ds dt dz \quad (6.22)$$

y refiriéndose con (\pm) a los casos $\ell = 2$ y $\ell = 3$. Naturalmente se deben hacer cambios similares en el término del lado derecho de (6.10). Como resultado de la formulación primal variacional del problema (6.9) esta se escribe de la siguiente manera:

Encontrar $\phi \in V$ tal que:

$$\sum_{\ell=1}^4 \tilde{\mathcal{A}}_\ell(\phi, \psi) = \frac{1}{k} \sum_{\ell=1}^4 \tilde{\mathcal{B}}_\ell(\phi, \psi) \quad (6.23)$$

y

$$\tilde{\mathcal{B}}_\ell(\phi, \psi) = \frac{1}{8} \iiint_{V_r} (3 \mp s) v_{\Sigma_f}(s, t, z) \phi(s, t, z) \psi(s, t, z) ds dt dz \quad (6.24)$$

donde los signos (\mp) en (6.24) corresponden a los casos $\ell = 1, 4$ y $\ell = 2, 3$ respectivamente. La funcional variacional modificada en LHS (6.20) es todavía simétrica positiva definida pero tiene coeficientes variables como resultado de la complejidad de la geometría.

CAPÍTULO 7

DESCRIPCIÓN DEL PROGRAMA DE CÓMPUTO AZNHEX

Dentro del análisis y diseño de reactores nucleares, es indispensable contar con el apoyo de herramientas de cómputo capaces de realizar cálculos numéricos a gran escala, de tal manera que simplifiquen el análisis de determinada tarea. Tal es el caso del programa de cómputo AZNHEX, un código especializado en el análisis neutrónico de reactores nucleares (difusión de neutrones en estado estacionario o dependiente del tiempo), que cuenten con ensambles combustibles de geometría prismática con corte transversal hexagonal.

En este capítulo se presenta una descripción del programa de cómputo AZNHEX, visto desde las subrutinas y funciones que lo componen. Además se definen cada uno de los elementos del archivo de entrada para AZNHEX, en el que se especifican los datos neutrónicos y geométricos del núcleo del reactor a analizar.

7.1 DESCRIPCIÓN DEL PROGRAMA AZNHEX

El programa de cómputo AZNHEX está basado en las discretizaciones espaciales descritas en capítulos anteriores. Está programado en lenguaje Fortran y permite resolver en forma numérica los sistemas algebraicos o problemas de valor propio resultantes para así obtener el valor propio dominante o factor efectivo de multiplicación de neutrones, el correspondiente flujo de neutrones en cada grupo de energía, la distribución radial y axial del flujo de neutrones como de la potencia en función del tiempo de ser el caso. El problema de valor propio resultante se resuelve con el Método de las Potencias con o sin aceleración por corrimiento de Wielandt. Los sistemas algebraicos resultantes se resuelven con el método MGCS (método del Gradiente Conjugado) cuando son simétricos y con el método BICGSTAB cuando no lo son.

7.2 DESCRIPCIÓN DE LAS SUBRUTINAS Y FUNCIONES DEL PROGRAMA AZNHEX

A continuación se presenta el nombre de cada una de las subrutinas y funciones que componen el programa AZNHEX, así como su correspondiente descripción:

SUBRUTINAS

aznhex	Programa principal del código AZNHEX.
bandgn	Subrutina que determina el número de incógnitas para un problema dado así como el ancho de banda del sistema algebraico y realiza la numeración de los nodos de la Discretización espacial 3D.
bandmst	Multiplica una matriz banda por un vector de trabajo (caso dependiente del tiempo).
bandmsw	Multiplica una matriz banda por un vector de trabajo (caso estado estacionario).

calpar	Calcula, para el flujo de neutrones, la cantidad de parámetros que hay en cada una de las direcciones x, y, z .
calpre	Calcula la concentración de precursores al tiempo t_{k+1} .
capnt	Multiplca una matriz A por un vector dado x (caso dependiente del tiempo).
capnw	Calcula el producto de la matriz A por un vector x dado (caso estado estacionario).
cem	Calcula el error entre dos aproximaciones sucesivas.
cparp	Calcula, para las concentraciones de precursores, la cantidad de parámetros que hay en cada una de las direcciones x, y, z .
cpiv	Calcula el producto interno entre dos vectores dados.
cpn	Calcula el producto de la matriz A por un vector x dado (caso estado estacionario).
cpwz	Determina la potencia promediada radialmente del núcleo entero.
cpwze	Determina la potencia promediada radialmente de cada ensamble combustible.
cpwxy	Determina la potencia promediada axialmente de cada ensamble combustible al tiempo $t = 0s$.
cpwxya	Determina la potencia promediada axialmente de cada ensamble combustible.
cpwxyak	Determina la potencia promediada axialmente de cada ensamble combustible al tiempo t_k .
cres	Calcula el residuo $Ax - b$, donde x es una aproximación dada.
csve	Suma pesada de dos vectores dados.
detmxyz	Determina el número de cortes en cada una de las tres direcciones x, y, z .
dgma	Determina la matriz diagonal que se empleará como preconditionador en la solución de cada sistema algebraico que surge en la determinación del valor propio dominante.
equv	Almacena un vector de trabajo en otro.
esdv	Multiplca la inversa de una matriz diagonal por un vector conocido.
genmxyz	Genera la malla tridimensional x, y, z .
inipre	Calcula la concentración inicial de precursores al tiempo $t = 0s$.
iniv	Inicializa el flujo neutrónico para todos los grupos de energía.
inive	Inicializa las concentraciones de precursores para todos los grupos de neutrones retardados.

inpkin	Lectura de datos de entrada correspondientes a la parte cinética.
ldat	Lectura de datos de entrada correspondientes a la parte estática.
leemtr	Lectura de las matrices locales del método nodal hexagonal-z (archivo MAT.RT0).
matkm	Determina en base a las matrices locales contenidas en el archivo MTR.RT0 la matriz local de trabajo A (caso estado estacionario).
matkmt	Determina en base a las matrices locales contenidas en el archivo MTR.RT0 la matriz local de trabajo A (caso dependiente del tiempo).
mgcs	Resuelve el sistema algebraico que resulta al aplicar el método de las potencias (solución grupo por grupo de un sistema simétrico).
mgcsw	Resuelve el sistema algebraico que resulta al aplicar el método de las potencias con el corrimiento Wielandt (solución de un sistema no simétrico).
mgcst	Resuelve el sistema algebraico que resulta al tiempo t_{k+1} .
normv	Normaliza un vector de flujo de neutrones a una determinada tasa de reacciones de fisión.
rss	Lee de un archivo de texto plano la solución obtenida de un estado estacionario previamente generado.
ueq	Iguala dos vectores de trabajo.
wss	Escribe en un archivo de texto plano la solución obtenida de un problema de estado estacionario.

FUNCIONES

rr	Determina la tasa de reacciones de fisión o la potencia dependiendo de la normalización seleccionada por el usuario.
react	Selecciona, de un conjunto de siete opciones, la forma en que se modificará la sección eficaz de remoción: escalón, rampa, cuadrática, senoidal, cosenoidal, exponencial y asintótica.

7.3 DESCRIPCIÓN DE LOS DATOS DE ENTRADA PARA EL PROGRAMA AZNHEX

La lectura de datos de entrada para el programa AZNHEX consta de dos partes: *a)* la que corresponde al caso estático y *b)* la que referente al caso dependiente del tiempo. La parte *b)* no puede realizarse si la *a)* no se realizó primero.

A continuación se describen los datos que requiere el programa para llevar a cabo los cálculos correspondientes al estado estacionario:

ihed	Título con el que se quiere identificar al problema bajo estudio.
nma	Es el número de materiales diferentes que constituyen el reactor. Si nma = 0, se detiene el proceso y solo constituye una bandera para dar información acerca de que no se hará ninguna otra corrida, es decir, el proceso se da por terminado.
ngr	Es el número de grupos de energía.
ntb	Es el número total de elementos barra, dentro de los cuales puede haber de combustible, de control, reflector, etc.
npmx	Es el número de divisiones gruesas en la dirección <i>x</i> .
npmy	Es el número de divisiones gruesas en la dirección <i>y</i> .
npmz	Es el número de divisiones gruesas en la dirección <i>z</i> .
ilbc	Número de condición de frontera a la izquierda. Si ilbc = 0 se tiene condición de flujo cero y si ilbc = 1 se considera condición de frontera extrapolada.
irbc	Número de condición de frontera a la derecha. Si irbc = 0 se tiene condición de flujo cero y si irbc = 1 se considera condición de frontera extrapolada.
inbc	Número de condición de frontera en la cara más cercana. Si inbc = 0 se tiene condición de flujo cero y si inbc = 1 se considera condición de frontera extrapolada.
ifbc	Número de condición de frontera en la cara más alejada. Si ifbc = 0 se tiene condición de flujo cero y si ifbc = 1 se considera condición de frontera extrapolada.
ibbc	Número de condición de frontera en la cara o tapa inferior. Si ibbc = 0 se tiene

	condición de flujo cero y si ibbc = 1 se considera condición de frontera extrapolada.
itbc	Número de condición de frontera en la cara o tapa superior. Si itbc = 0 se tiene condición de flujo cero y si itbc = 1 se considera condición de frontera extrapolada.
nmt	Índice del método nodal empleado. De momento solo se cuenta con la familia RTN.
ik	Índice de la familia del método nodal. Hasta ahora, únicamente se cuenta con el índice 0 (RTN-0).
ntbt	Es el número total de elementos barra dependientes del tiempo.
np	Es el número de grupos precursores de neutrones retardados.
iwlt	Opción para usar el corrimiento Wielandt en el método de las potencias.
kss	Opción para almacenar en archivo el resultado del cálculo de estado estacionario para su posterior lectura.
lst	Opción para calcular los coeficientes de difusión a partir de las secciones eficaces totales.
ipw	Opción para imprimir el mapa de potencias radiales en cada paso de tiempo.
ism	Opción para transponer la matriz de dispersiones que se proporcione.
pitch	Separación entre centros de dos ensambles vecinos.
al	Si ilbc = 1 entonces es el coeficiente para la condición de frontera extrapolada en la cara izquierda. En este caso si al = 0 corresponderá al caso particular de corriente cero. Si ilbc = 0 el valor de al no se utiliza.
ar	Si irbc = 1 entonces es el coeficiente para la condición de frontera extrapolada en la cara derecha. En este caso si ar = 0 corresponderá al caso particular de corriente cero. Si irbc = 0 el valor de ar no se utiliza.
an	Si inbc = 1 entonces es el coeficiente para la condición de frontera extrapolada en la cara más cercana. En este caso si an = 0 corresponderá al caso particular de corriente cero. Si inbc = 0 el valor de an no se utiliza.
af	Si ifbc = 1 entonces es el coeficiente para la condición de frontera extrapolada en la cara izquierda. En este caso si af = 0 corresponderá al caso particular de corriente cero. Si ifbc = 0 el valor de af no se utiliza.
ab	Si ibbc = 1 entonces es el coeficiente para la condición de frontera extrapolada en la cara o tapa inferior. En este caso si ab = 0 corresponderá al caso particular de corriente cero. Si ibbc = 0 el valor de ab no se utiliza.

at	Si itbc = 1 entonces es el coeficiente para la condición de frontera extrapolada en la cara o tapa superior. En este caso si at = 0 corresponderá al caso particular de corriente cero. Si itbc = 0 el valor de at no se utiliza.
mx	Malla de discretización gruesa en la dirección <i>x</i> .
xm	Cortes en la dirección <i>x</i> correspondientes a la malla proporcionada en mx .
my	Malla de discretización gruesa en la dirección <i>y</i> .
ym	Cortes en la dirección <i>y</i> correspondientes a la malla proporcionada en my .
mz	Malla de discretización gruesa en la dirección <i>z</i> .
zm	Cortes en la dirección <i>z</i> correspondientes a la malla proporcionada en mz .
bk	Buckling para cada grupo de energía.
ncz	Mapa de distribución radial de elementos prismáticos, es un arreglo matricial 2D de npmy –1 filas por npmx –1 columnas de valores enteros donde el cero representa una localidad vacía. En el caso de ensambles de un mismo lote de combustible pueden introducirse números repetidos.
ncc	Mapa de distribución radial de elementos prismáticos, es un arreglo matricial 2D de npmy –1 filas por npmx –1 columnas de valores enteros donde el cero representa una localidad vacía. En este mapa solo se pueden repetir números de ensambles prismáticos pertenecientes a un mismo hexágono.
ncc	Mapa de distribución radial de cuadrantes de los hexágonos. Es un arreglo matricial 2D de npmy –1 filas por npmx –1 columnas de valores enteros donde el cero representa una localidad vacía. En este mapa solo pueden aparecer los enteros 0, 1, 2, 3 y 4, donde el cero indica localidad vacía.
knz	Distribución axial de materiales, a lo más nma , en cada uno de los lotes de combustibles o elementos barra, en total ntb .
next	El número máximo de iteraciones externas para el método de las potencias con o sin corrimiento de Wielandt.
epsk	La diferencia máxima permitida entre dos iteraciones sucesivas para aceptar la convergencia del proceso iterativo.

Para los siguientes parámetros *I* varía desde 1 hasta **nma**.y *J* de 1 hasta **ngr**:

- d(J,I)** Si **lst** = 1, entonces son los coeficientes de difusión para cada material *I* y para cada grupo *J*. Si **lst** = 0, entonces son las secciones macroscópicas totales para cada material *I* y para cada grupo *J*.
- sr(J,I)** Son las secciones macroscópicas de remoción para cada material *I* y para cada grupo *J*.
- sf(J,I)** Son las secciones macroscópicas de fisión para cada material *I* y para cada grupo *J* multiplicadas por el número de neutrones producidos por fisión.
- xkp(J,I)** Son las secciones macroscópicas de fisión para cada material *I* y para cada grupo *J* multiplicadas por el factor de producción de energía por fisión.
- xp(J,I)** Son las componentes del espectro de fisión normalizado para cada material *I* y para cada grupo *J*.
- ss(K,J,I)** Son las secciones macroscópicas de dispersión del grupo *K* al grupo *J*, con $K = 1, \dots, \mathbf{ngr}$, para cada material *I*. Si **ism** = 1 se transpone.

Los datos que requiere el programa para llevar a cabo los cálculos correspondientes al problema dependiente del tiempo se describen a continuación:

- impt** Número de pasos de tiempo para impresión.
- nper** Número total de perturbaciones en la función **react**.
- itgr** Arreglo de dimensión **ngr** cuyas entradas deben ser ceros o unos, donde la posición que ocupa un uno (1), representa el grupo de energía que se va a modificar de la sección de remoción.
- tr** Arreglo de dos entradas, la primera es el tiempo final hasta donde se estudiará el problema y la segunda el paso de tiempo uniforme que se estará empleando.
- p** Arreglo 5x7 que contiene la forma en que se modifica la sección de remoción [5].
- vg** Velocidades de los neutrones para cada grupo de energía.
- bi** Valores de las fracciones de producción de precursores de neutrones retardados para cada uno de los grupos.
- rl** Valores de las constantes de decaimiento de los precursores de neutrones retardados

para cada uno de los grupos.

- tf** Valor de la θ_f .
- tp** Valores de las θ_{ip} para cada uno de los grupos de neutrones retardados. Si se le asigna un valor negativo entonces **aznhex** determina internamente los valores para estos parámetros.
- itncm** Mapa de distribución radial de elementos prismáticos cuya sección de remoción variará con el tiempo, es un arreglo matricial 2D de **npmy**-1 filas por **npmx**-1 columnas de valores enteros 0 y 1, donde el cero representa una localidad vacía o una donde la sección de remoción no cambiará con el tiempo y el 1 una localidad donde ésta sí cambiará.
- kzt** Distribución axial de ceros y unos donde el cero significa que no habrá cambio en la sección de remoción y el uno que sí. La posición del uno indica el número de material cuya sección de remoción cambiará con el tiempo.
- nx, ny** Valores del número de columnas y de filas con el que se definirá el mapa para la impresión radial de la potencia del reactor.
- ncpe** Mapa para la impresión radial de la potencia del reactor. Es un arreglo de **nx** columnas por **ny** filas con valores enteros. Si el valor es cero se asume que la localidad es vacía. Si es -1 es un indicador que deberá usarse para representar una interfaz entre dos hexágonos. Cada valor entero diferente de 0 y -1 corresponderá a un hexágono, con la posible excepción de aquellos que están en la frontera del dominio.

En los Apéndices A y B se proporcionan el listado de los archivos de entrada y de salida para un ejemplo, respectivamente.

CAPÍTULO 8

APLICACIÓN DEL PROGRAMA AZNHEX EN PROBLEMAS BENCHMARK

A efecto de comprobar el buen funcionamiento del código desarrollado, éste se pone a prueba resolviendo problemas de referencia. Estos problemas, también llamados problemas benchmark, son elaborados de tal manera que para un problema en particular, participan diferentes instituciones implementando sus herramientas (códigos computacionales en nuestro caso) para solucionar dicho problema, comparando la eficacia, velocidad y/o precisión en los resultados de cada código utilizado. Estos problemas benchmark que se enfocan en el tratamiento de problemas específicos permiten identificar si el código desarrollado presenta un mal funcionamiento.

AZNHEX se utilizó para solucionar tres problemas benchmark, con la finalidad de verificar su correcto funcionamiento. En el presente capítulo se muestra una descripción de los problemas tratados (los dos primeros estáticos, para reactores tipo VVER-1000 y FBR; el tercer problema, un caso dependiente del tiempo para un reactor tipo VVER-440), mostrando las características geométricas y neutrónicas de cada problema.

8.1 PROBLEMA AER-FCM-101

El problema benchmark utilizado, se deriva del documento Solutions of a 3D VVER-1000 Benchmark, propuesto por G. Schultz. El problema considerado es el AER-FCM-101, en el que se considera el modelo del núcleo tridimensional de un reactor tipo VVER-1000, en estado estacionario [29, 30].

La parte activa del núcleo del reactor, está definida con una altura de 355cm, estando cubierto axial y radialmente por reflectores, cada uno de 35.5cm lo que da una altura total de 426cm. Las condiciones de frontera se señalan como vacío para los bordes y de corriente cero sobre la línea axial que pasa por la parte central del núcleo. Por otro lado, se definen veinticinco ensambles combustibles, algunos de ellos homogéneos. Para ello, se consideran siete composiciones de materiales, para dos grupos de energía. El pitch entre celdas de combustible para este problema, es de 24.1cm. Los materiales definidos y sus correspondientes parámetros neutrónicos, se muestran en la Tabla 8.1. Se trata de un problema de referencia que solo considera el estado estacionario.

La configuración axial de los ensambles combustibles queda definida de la siguiente manera [31]:

- a) En la Figura 8.1 se presenta la distribución axial de los materiales para los ensambles combustibles, mostrando aquellos en los que un determinado ensamble combustible, está compuesto por más de un material.
- b) La distribución radial de los ensambles combustibles, se presenta en la Figura 8.2. En este caso, se describe una sección del núcleo del reactor VVER-1000, correspondiente a 30 grados del núcleo completo. Se presenta la configuración de los veinticinco ensambles combustibles, así como el material por el cual están formados.

Tabla 8.1. Tipos de materiales y sus parámetros neutrónicos para el reactor VVER–1000.

Tipo de Material	Parámetros Neutrónicos					
	Grupo de Energía g	D_g	Σ_{rg}	$\Sigma_{s1 \rightarrow g}$	$\Sigma_{\epsilon g}$	$\nu \Sigma_{fg}$
		[cm]	[1/cm]	[1/cm]	MW/10 ³ n.cm	[1/cm]
1	1	1.3754	0.0241		6.0130e -07	0.00476
	2	0.3833	0.0660	0.0159	1.1231e -05	0.08398
2	1	1.4095	0.0247		5.9305e -07	0.00470
	2	0.3875	0.0749	0.0143	1.1253e -05	0.08412
3	1	1.3706	0.0238		7.4429e -07	0.00584
	2	0.3802	0.0804	0.0151	1.5336e -05	0.11468
4	1	1.3944	0.0240		7.8731e -07	0.00616
	2	0.3854	0.0947	0.0139	1.6848e -05	0.12598
5	1	1.3693	0.0236		8.1014e -07	0.00633
	2	0.3787	0.0876	0.0148	1.7381e -05	0.12998
7	1	1.3696	0.0237		7.9536e -07	0.00622
	2	0.3791	0.0858	0.0149	1.6866e -05	0.12612
R	1	1.0000	0.0406		0.0000	0.0000
	2	0.3333	0.0527	0.0248	0.0000	0.0000

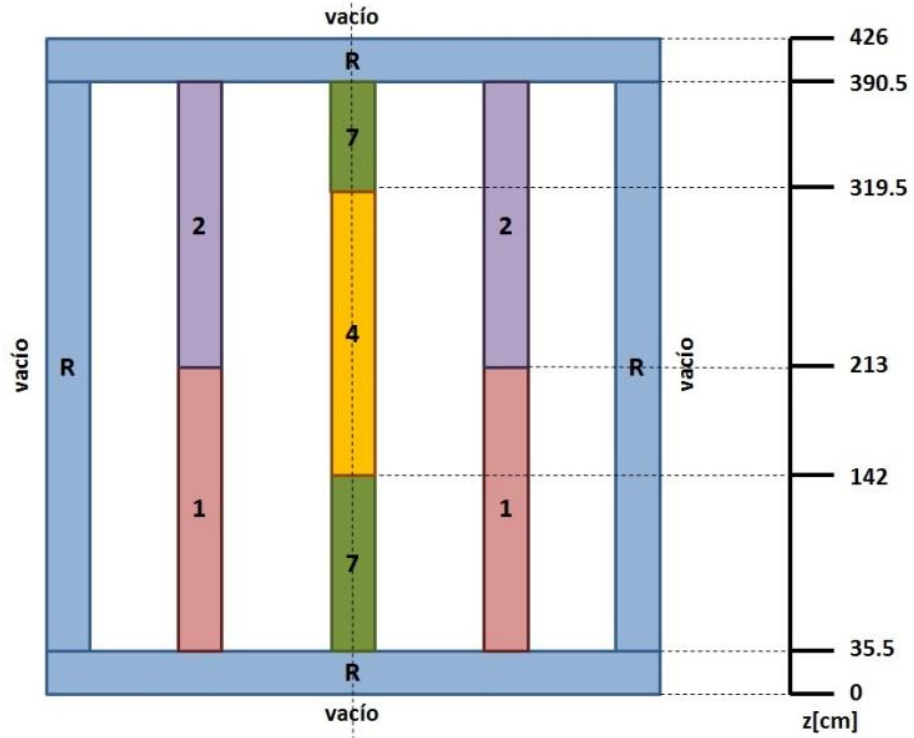


Figura 8.1. Configuración axial de los ensambles combustible del núcleo del reactor VVER-1000.



Figura 8.2. Configuración radial de los ensambles combustible del núcleo del reactor VVER-1000.

8.2 REACTOR FBR CON GEOMETRÍA HEXAGONAL-Z EN EL NÚCLEO

En este problema, se analiza el núcleo de un reactor tipo FBR (del inglés Fast Breeder Reactor), el cual tiene geometría hexagonal-Z, similar al núcleo KNK-II [32].

El núcleo evaluado considera ensambles hexagonales en tres dimensiones (geometría hexagonal-Z). Para este caso de estudio, se consideran cuatro grupos de energía, ocho materiales combustibles y tres escenarios, en donde intervienen barras de control en diferentes posiciones: el primero sin considerar barra de control, un segundo caso con barra de control insertada a la mitad y finalmente, el escenario con barra de control completamente insertada.

La Figura 8.3 muestra la configuración radial utilizada del núcleo del reactor, presentando 90° del mismo. La distribución axial de los elementos que componen el núcleo del reactor, se presenta en la Figura 8.4, y en la Figura 8.5 se muestra la configuración de las barras de control para los tres casos de estudio.

Finalmente, en el Apéndice C, se proporcionan los valores de las secciones eficaces para cada uno de los materiales utilizados entre otros datos nucleares de interés.

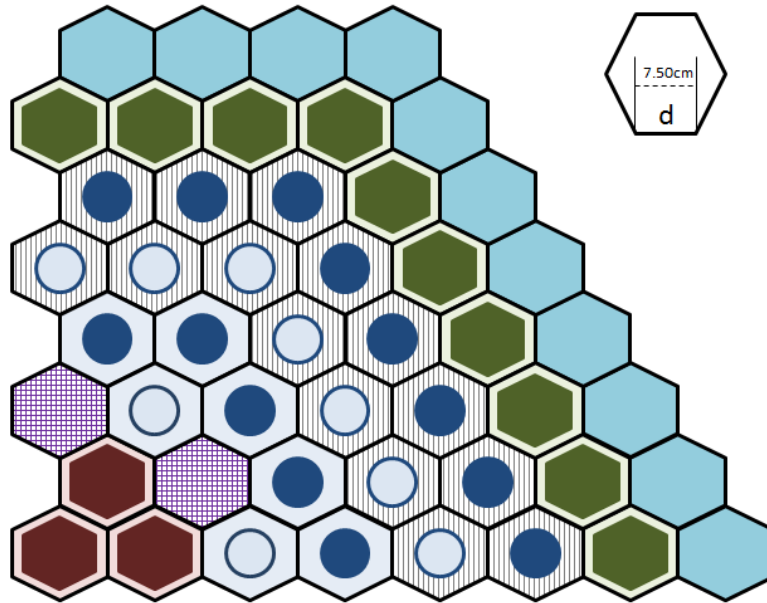


Figura 8.3.a. Distribución radial de 90° del núcleo del reactor FBR (KNK-II).

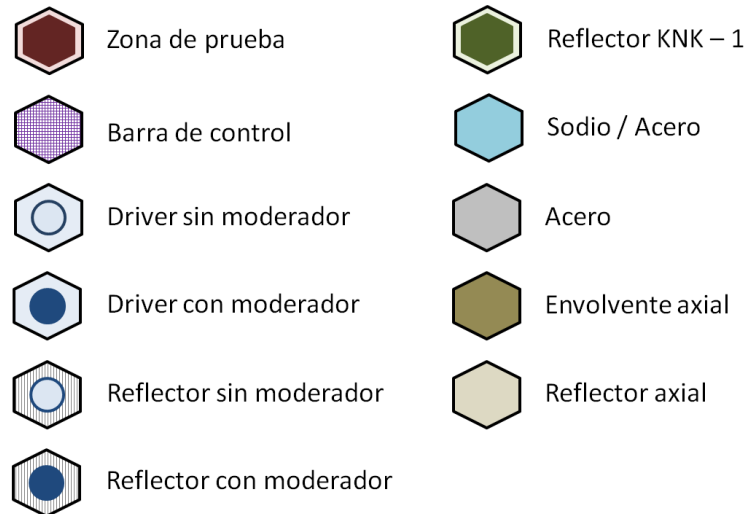


Figura 8.3.b. Definición de los materiales utilizados.

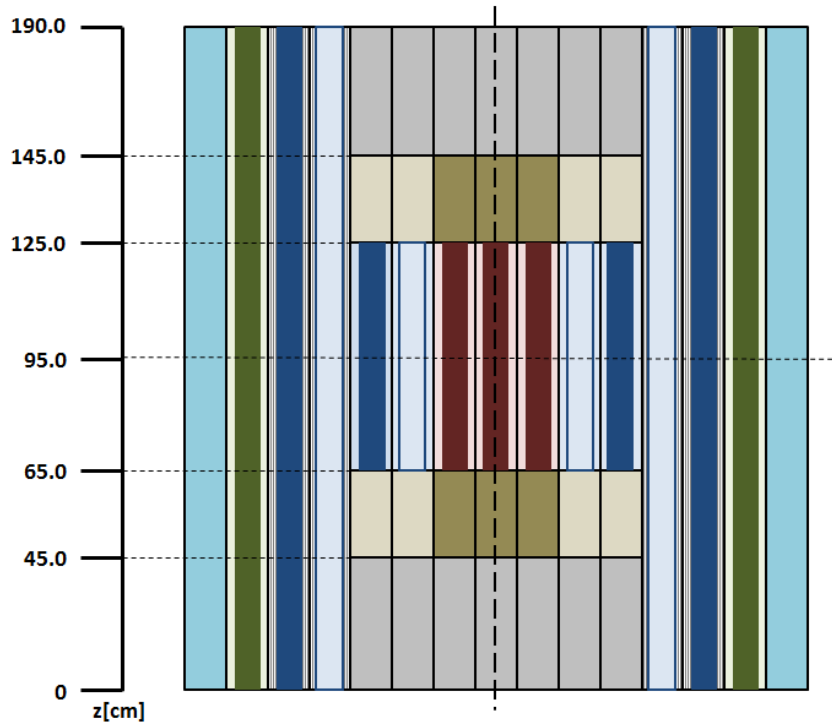


Figura 8.4. Distribución axial del núcleo del reactor FBR (KNK-II).

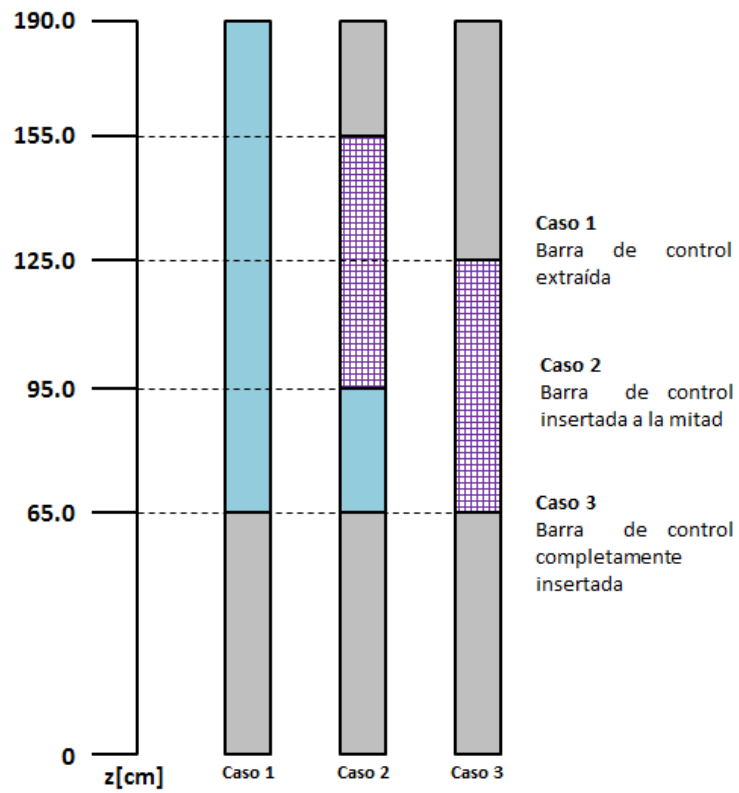


Figura 8.5. Composición axial de las barras de control.

8.3 REACTOR VVER-440 CON DEPENDENCIA EN TIEMPO

En este problema se considera el movimiento de ensambles de control [33, 34]. La configuración del núcleo se muestra en la Figura 8.6, se trata de un reactor VVER-440 que cuenta con barras de control, identificadas por los números 21, 23, 25 y 26, los cuales se refieren al material por el que se componen. El núcleo del reactor cuenta con tres lotes de ensambles combustible, compuestos por los materiales 1, 2 y 3. Además, el núcleo del reactor, cuenta con reflectores radiales y axiales, correspondientes a los materiales 5 y 6, respectivamente. Se consideran dos grupos de energía para los parámetros neutrónicos (Tabla 8.2), además de que las condiciones de frontera, externas al borde de los reflectores, son del tipo albedo.

La Figura 8.6 ejemplifica la configuración de los ensambles combustibles, absorbedores y reflectores, en una sección de 180° del núcleo del reactor VVER-440. En la Figura 8.7, se muestra la distribución axial de los elementos componentes del reactor. Se define que los ensambles de control 21 y 26, tienen una posición inicial de 50 cm.

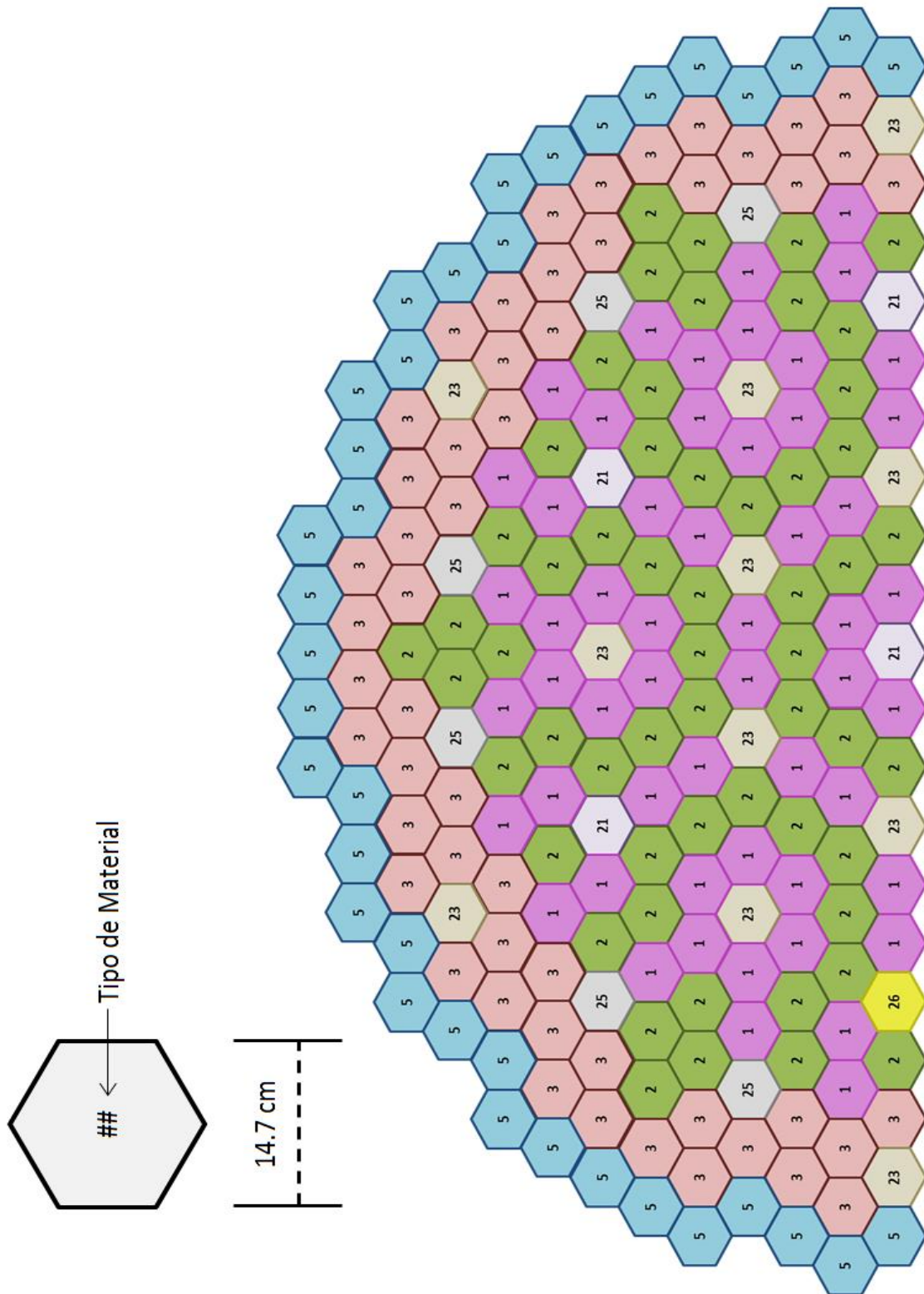


Figura 8.6. Sección radial de 180° del núcleo del reactor VVER-440.

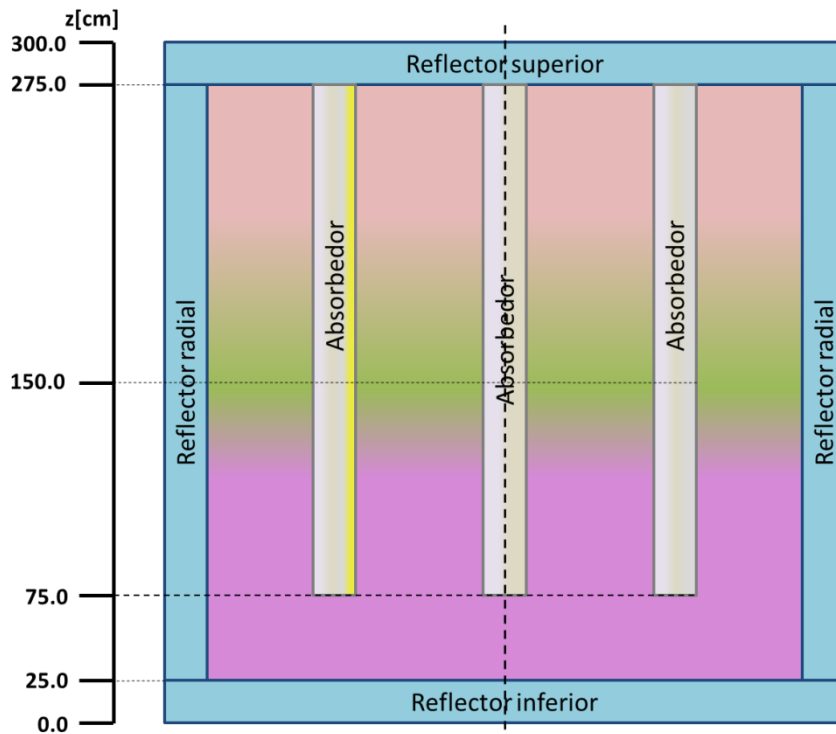


Figura 8.7. Distribución axial de los elementos componentes del núcleo del reactor.

Para el caso del transitorio, se debe considerar que los ensambles de control 23 y 25, están fuera del núcleo al inicio de los cálculos del transitorio. El ensamble de control 26 es extraído de 0.0s a 0.8 segundos a una velocidad constante. Las caídas de los ensambles de control 23 y 25, inician a 1.0 segundo y finalizan a los 11 segundos. Finalmente, la caída del grupo 21 de ensambles de control, inicia a 1 segundo; en estos últimos casos, se considera una velocidad constante. El transitorio se ejecuta durante 6.0 segundos.

Tabla 8.2. Parámetros neutrónicos para el problema benchmark VVER–440 dependiente del tiempo.

Material	Grupo de Energía g	Parámetros neutrónicos			
		D_g	Σ_{ag}	Σ_{fg}	$\Sigma_{s1 \rightarrow 2}$
1	1	1.34660	0.025255	0.004432	
	2	0.37169	0.064277	0.073475	0.016893
2	1	1.33770	0.024709	0.005513	
	2	0.36918	0.079361	0.105410	0.015912
3	1	1.33220	0.024350	0.007012	
	2	0.36502	0.100100	0.149080	0.014888
4	1	1.19530	0.035636	0.00000	
	2	0.19313	0.134980	0.00000	0.022264
5	1	1.44850	0.033184	0.00000	
	2	0.25176	0.032839	0.00000	0.032262
6	1	1.34130	0.029301	0.00000	
	2	0.24871	0.064655	0.00000	0.027148
21	Ver material 2 ó 4				
23	Ver material 2 ó 4				
25	Ver material 1 ó 4				
26	Ver material 2 ó 4				

Para el cálculo del transitorio, se consideran los siguientes datos:

Parámetro	Grupo precursor i					
	1	2	3	4	5	6
Beta (β_i)	0.000247	0.0013845	0.001222	0.0026455	0.000832	0.000169
Lambda (λ_i) [1/s]	0.012700	0.0317000	0.115000	0.3110000	1.400000	3.870000

Incluyendo:

El valor promedio de los neutrones producidos/fisión (ν), para todos los ensambles, en el primer grupo de energía es de 2.55, y de 2.43 para el segundo grupo de energía.

Por otro lado, se define la velocidad promedio de los neutrones en el grupo 1 (v_1) igual a $1.250e+07$ cm/s, mientras que la velocidad (v_2) es de $2.500e+05$ cm/s.

CAPÍTULO 9

RESULTADOS DEL PROGRAMA DE CÓMPUTO AZNHEX

En este capítulo se muestran los distintos resultados obtenidos con el programa de cómputo AZNHEX. Los primeros cálculos que se reportan se llevaron a cabo para los problemas de referencia o problemas benchmark descritos en las primeras secciones del Capítulo 8 que corresponden al estado estacionario. El último de los problemas incluye la parte dependiente en tiempo.

9.1 RESULTADOS DEL PROBLEMA AER-FCM-101

Los primeros resultados obtenidos con AZNHEX son los que corresponden a la k_{eff} empleando cuatro divisiones axiales tal y como se indica en la Tabla 9.1. En ésta se puede observar que la diferencia porcentual es de 0.023% para la malla axial más gruesa y de 0.039% para la más fina, lo cual indica que el resultado que más se ajusta es el primero. Las otras divisiones axiales muestran una k_{eff} que se va alejando de la de referencia pero no significativamente. AZNHEX.

Tabla 9.1. k_{eff} (AZNHEX) con varias divisiones axiales comparándose con $k_{eff} = 1.049526$ [30].

Divisiones Axiales (z)	k_{eff}	Diferencia (%)
12	1.049288	0.023
24	1.049158	0.035
36	1.049126	0.038
48	1.049113	0.039

Para este problema benchmark, la Figura 9.1 muestra los resultados reportados en la literatura para la distribución radial de potencia obtenidos con un método de diferencias finitas de malla gruesa (FCM) y con el código DYN3D, mientras que la Figura 9.2 presenta los obtenidos con FCM y AZNHEX.

La Figura 9.1 presenta diferencias aceptables entre FCM y DYN3D, sin embargo, las que se exhiben en las Figuras 9.2 a 9.5 entre FCM y AZNHEX, son atribuibles a la falta de refinamiento al interior de cada hexágono, no obstante que se ha empleado refinamiento axial al pasar de la malla más gruesa, de $z = 12$, hasta la más fina, $z = 48$. Opción que tendrá el código AZNHEX en una futura versión.

Por otro lado, las Figuras 9.6 a 9.8 muestran un comparativo entre los resultados obtenidos con AZNHEX para diferentes mallados espaciales en la dirección z .

También AZNHEX determina la distribución axial de potencia y las Figuras 9.9 a 9.11 presentan los resultados obtenidos con AZNHEX y los reportados con FCM para cada uno de los ensambles que tiene el núcleo bajo estudio. Las máximas diferencias se obtienen entre los nodos 3 y 4. Además las Figuras 9.12 a 9.14 permiten comparar los resultados obtenidos con AZNHEX con una malla axial de 12 y otra de 48 divisiones.

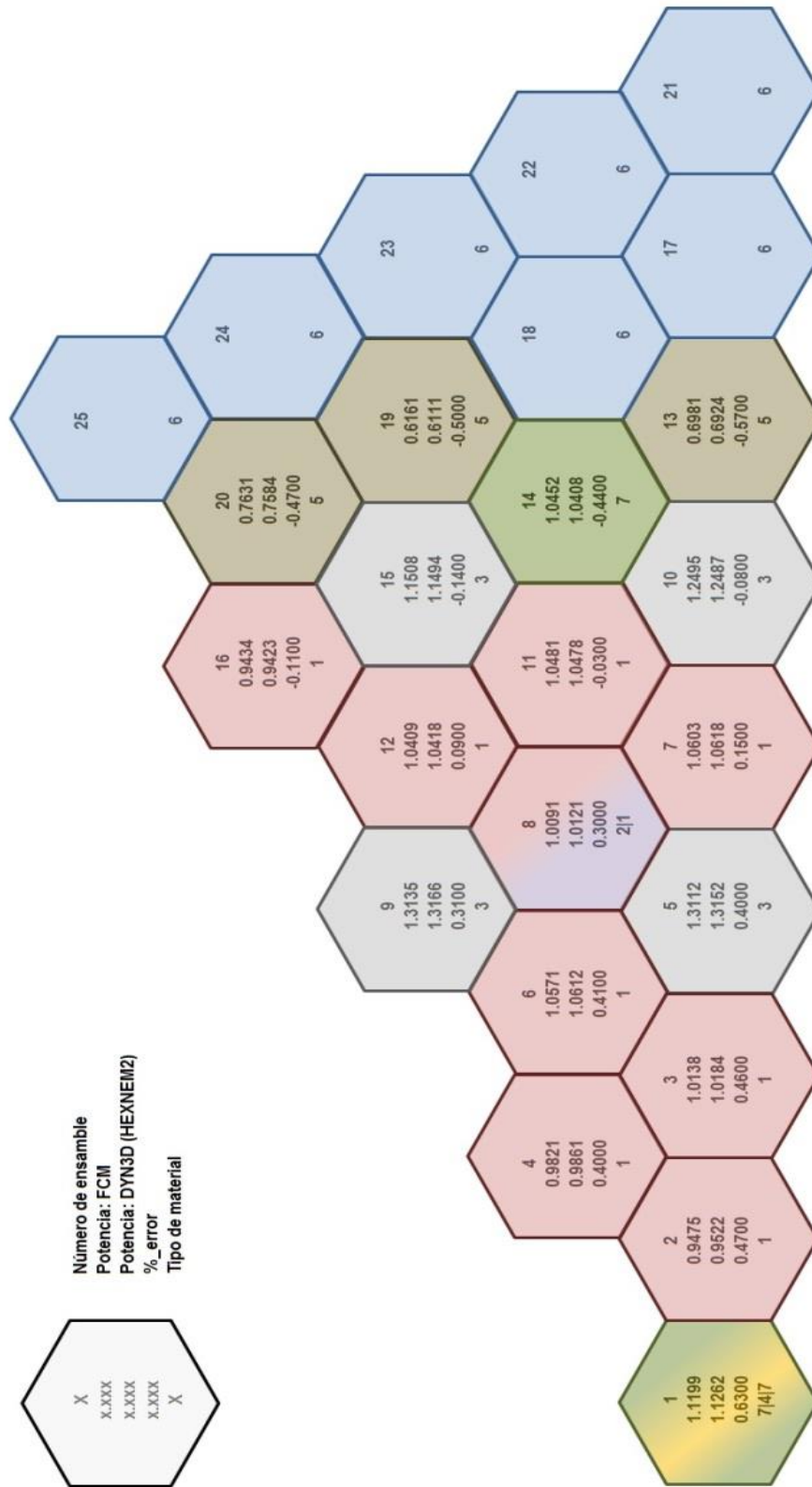


Figura 9.1. Distribución radial de potencia para los códigos FCM y DYN3D.

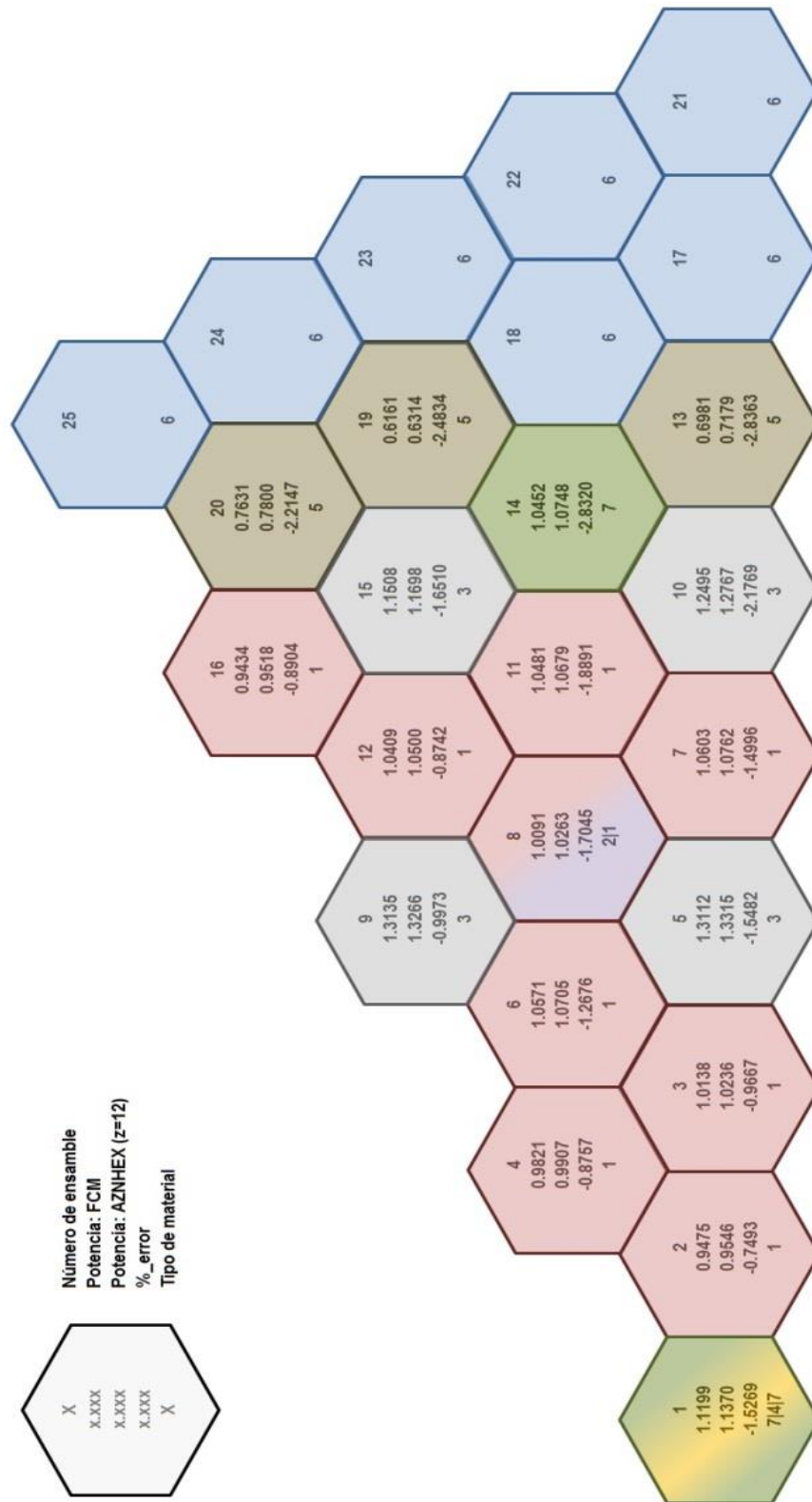


Figura 9.2. Distribución radial de potencia para los códigos FCM y AZNHEX con 12 divisiones en la dirección z.

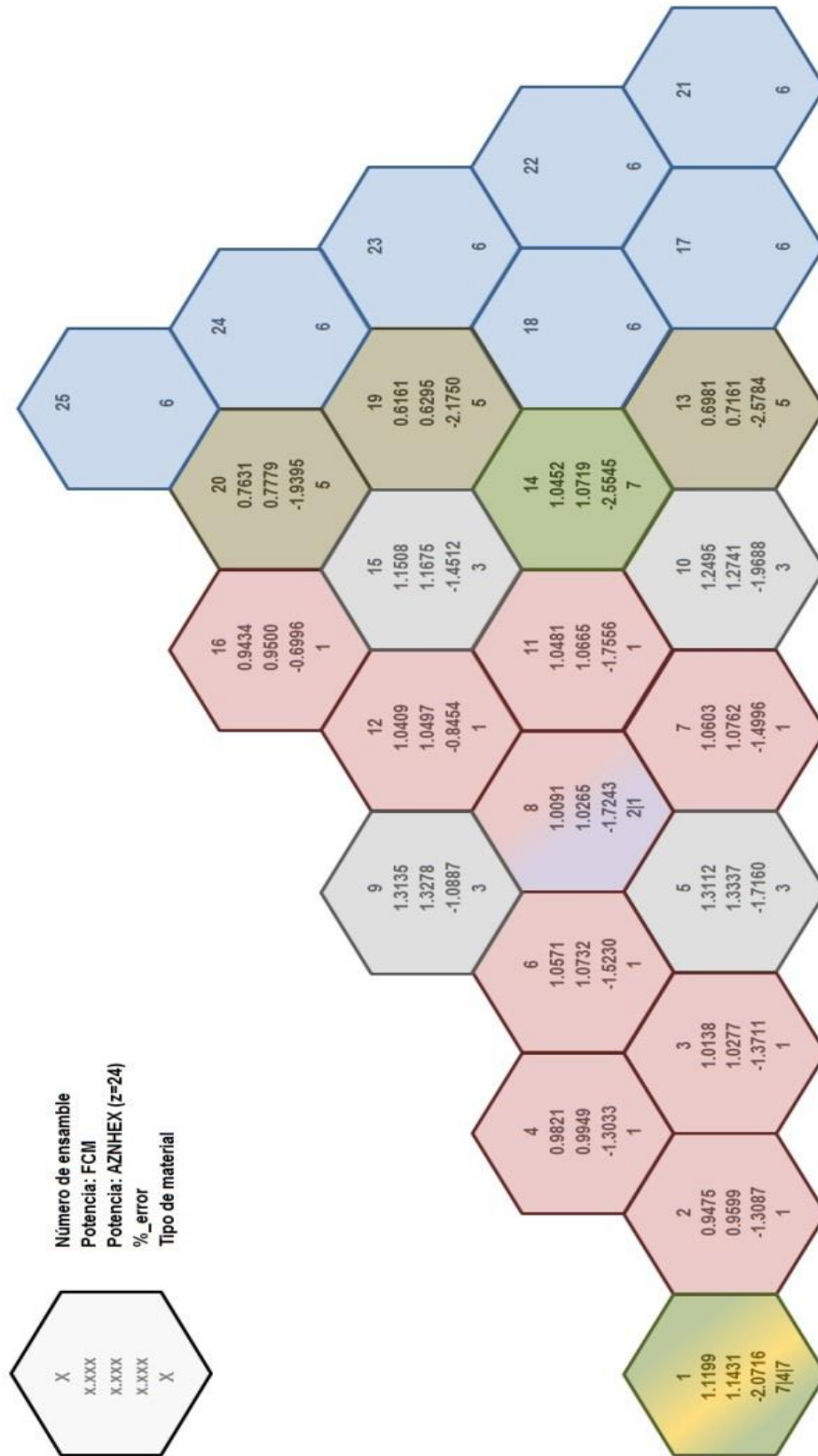


Figura 9.3. Distribución radial de potencia para los códigos FCM y AZNHEX con 24 divisiones en la dirección z.

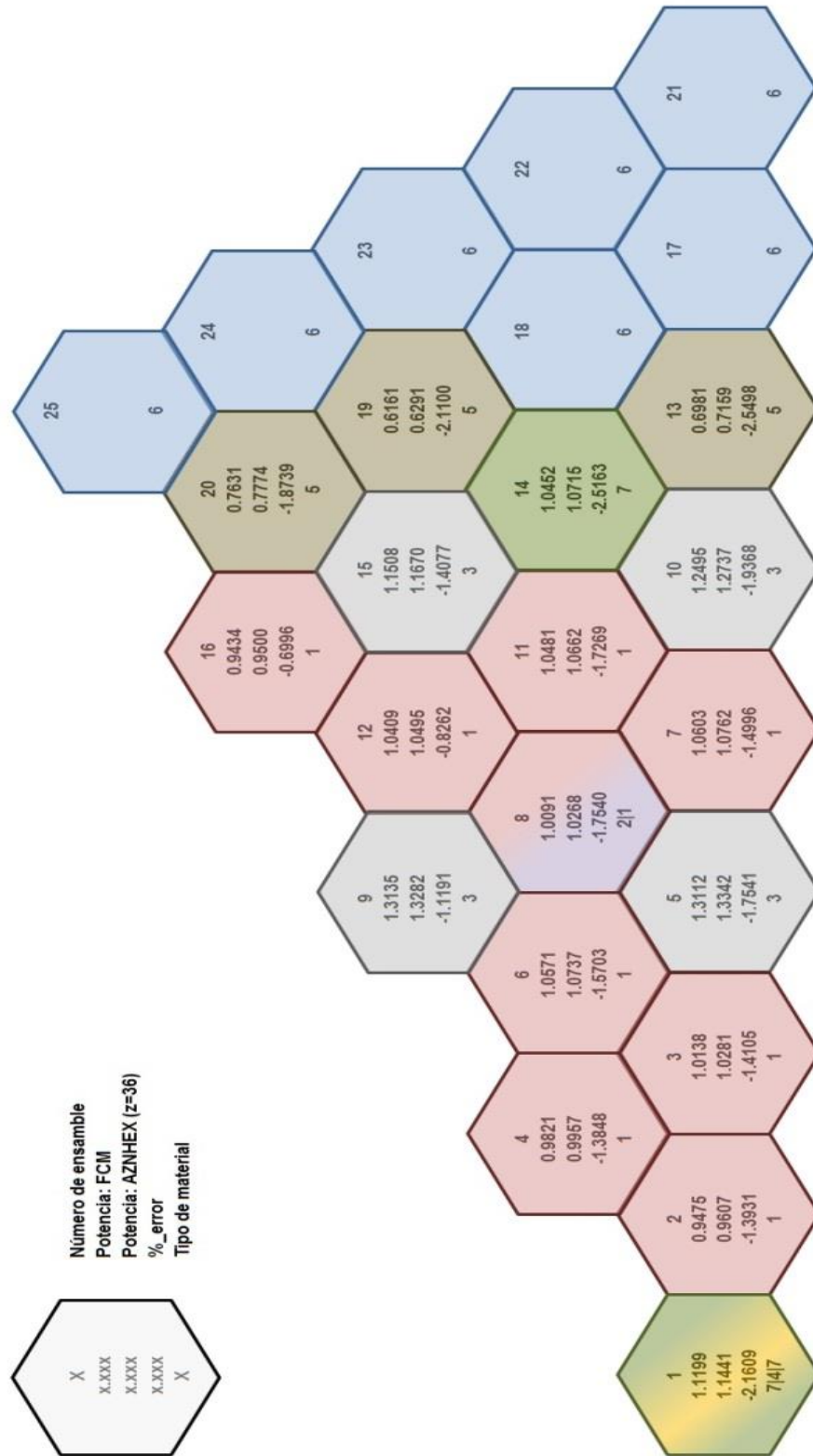


Figura 9.4. Distribución radial de potencia para los códigos FCM y AZNHEX con 36 divisiones en la dirección z.

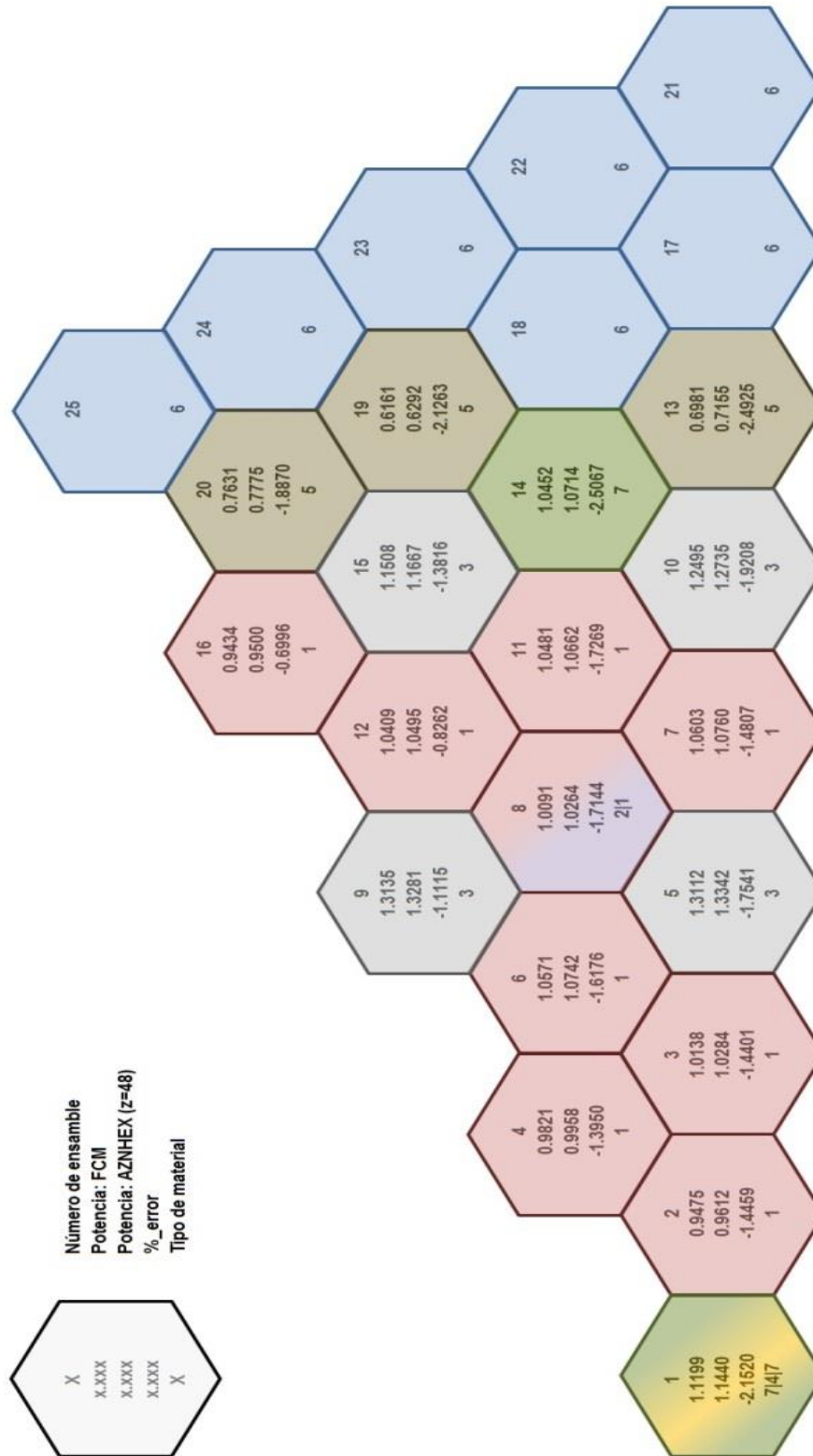


Figura 9.5. Distribución radial de potencia para los códigos FCM y AZNHEX con 48 divisiones en la dirección z.

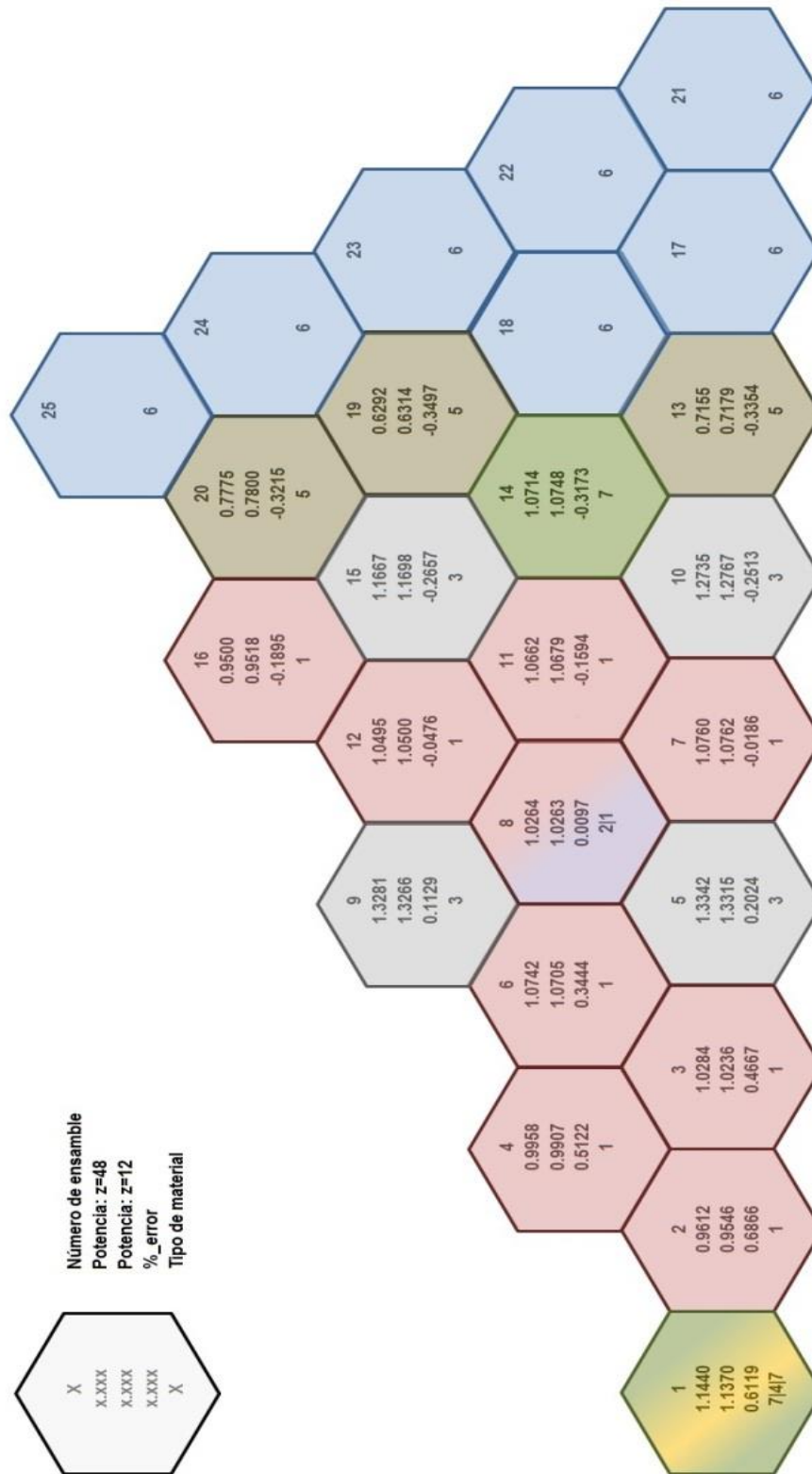


Figura 9.6. Comparación entre la distribución radial de potencia obtenida con AZNHEX con 12 y 48 divisiones en la dirección z.

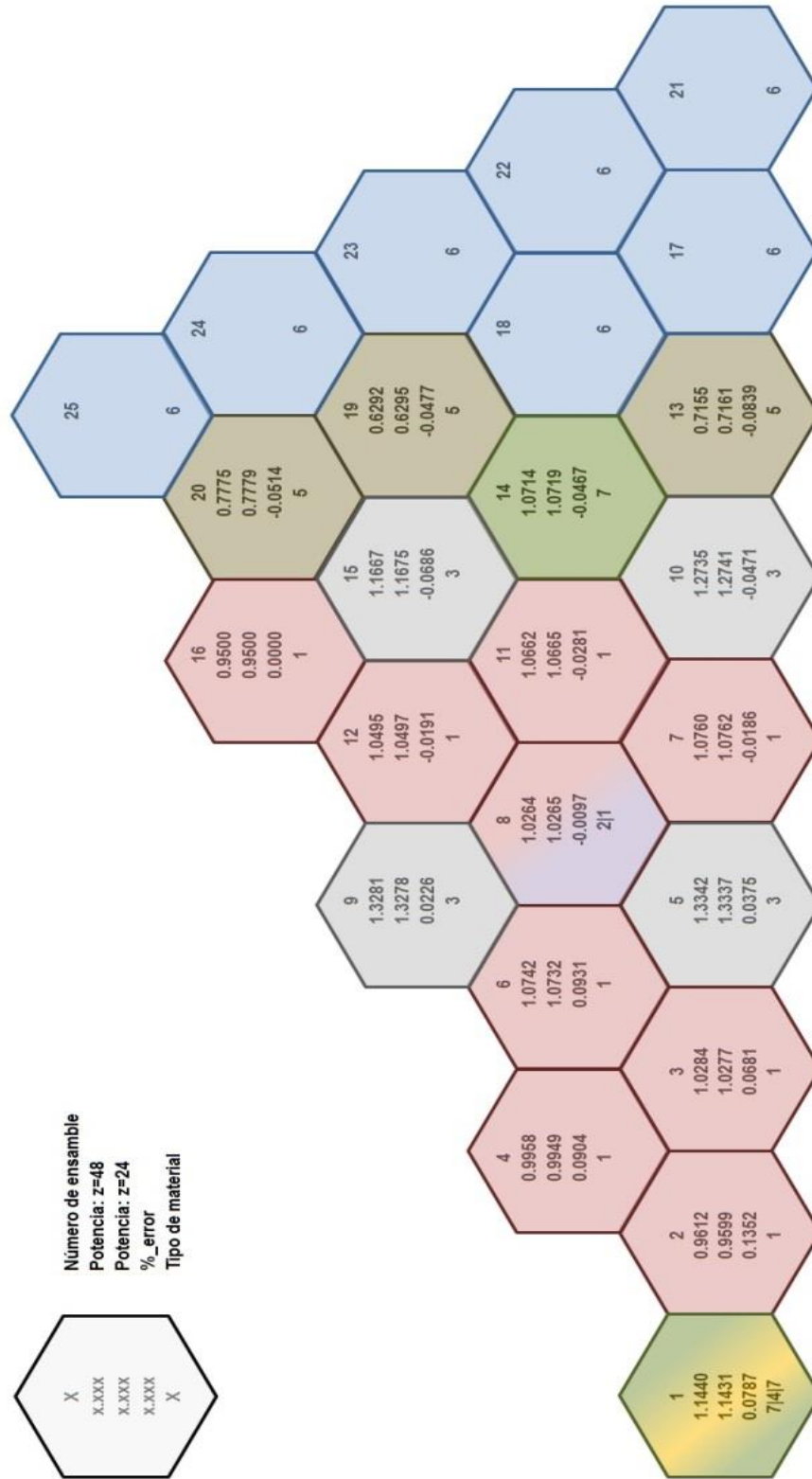


Figura 9.7. Comparación entre la distribución radial de potencia obtenida con AZNHEX con 24 y 48 divisiones en la dirección z.

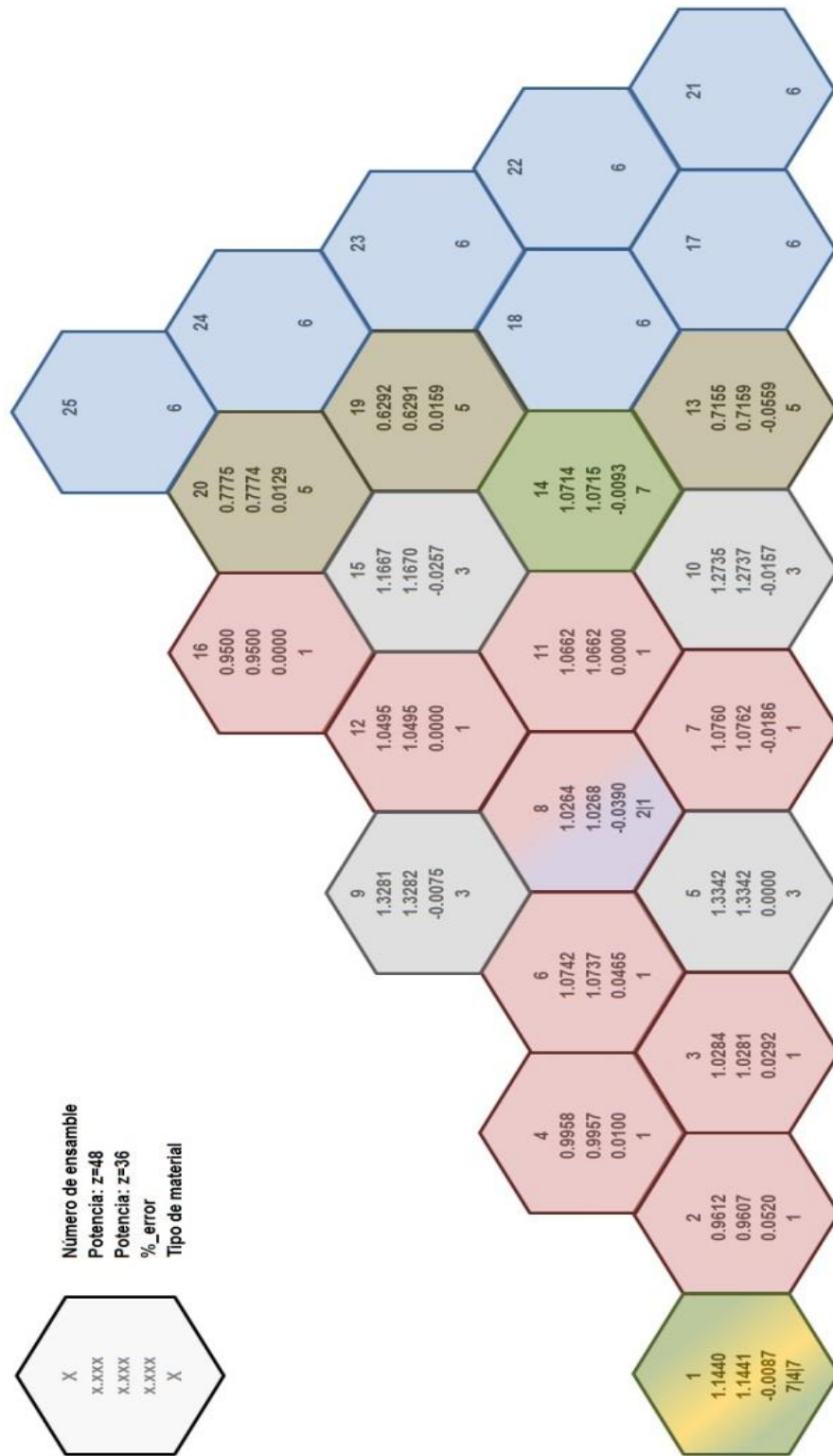


Figura 9.8. Comparación entre la distribución radial de potencia obtenida con AZNHEX con 36 y 48 divisiones en la dirección z.

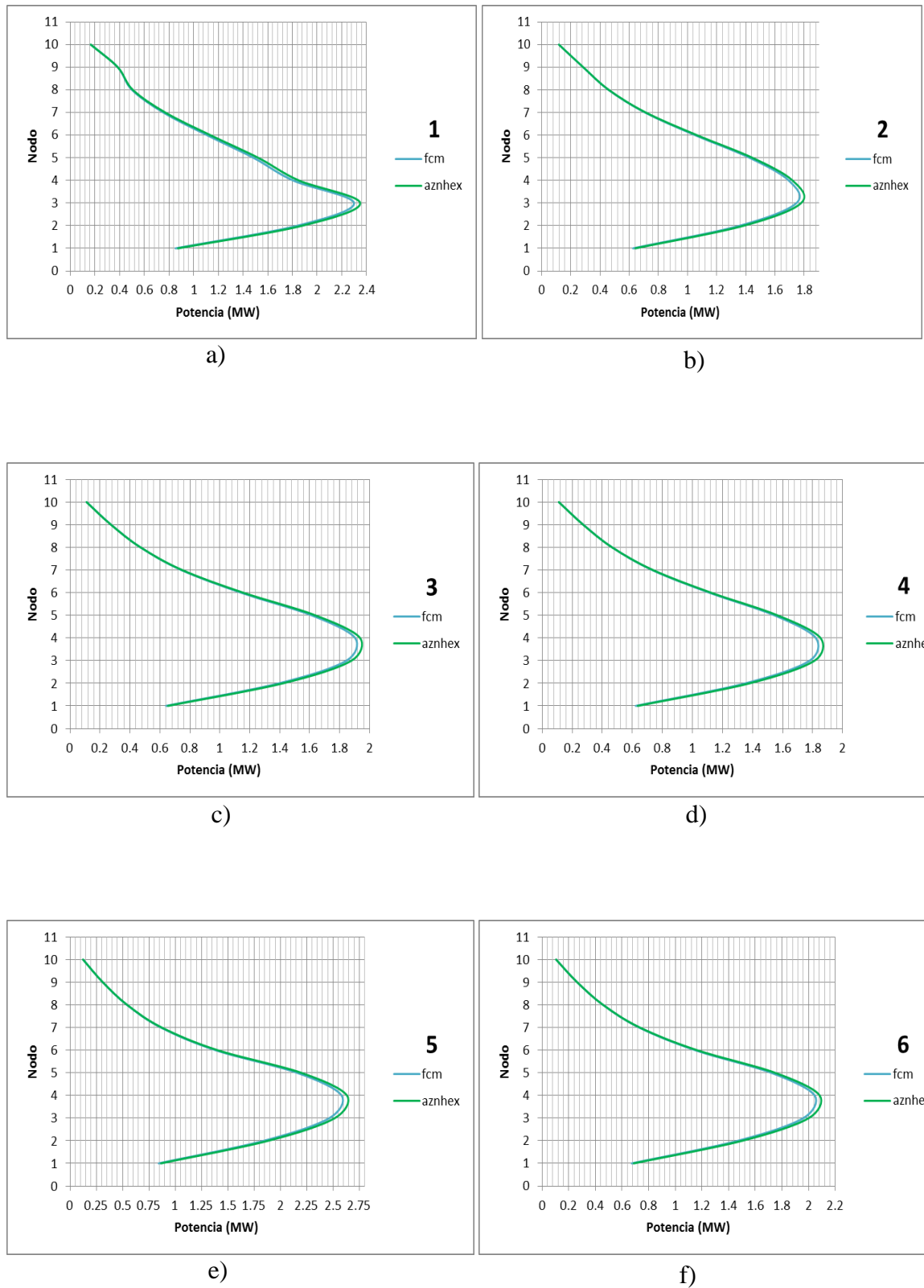


Figura 9.9. Perfil axial de potencia para los ensambles combustible 1 a 6, obtenidos con AZNHEX y los reportados con FCM.

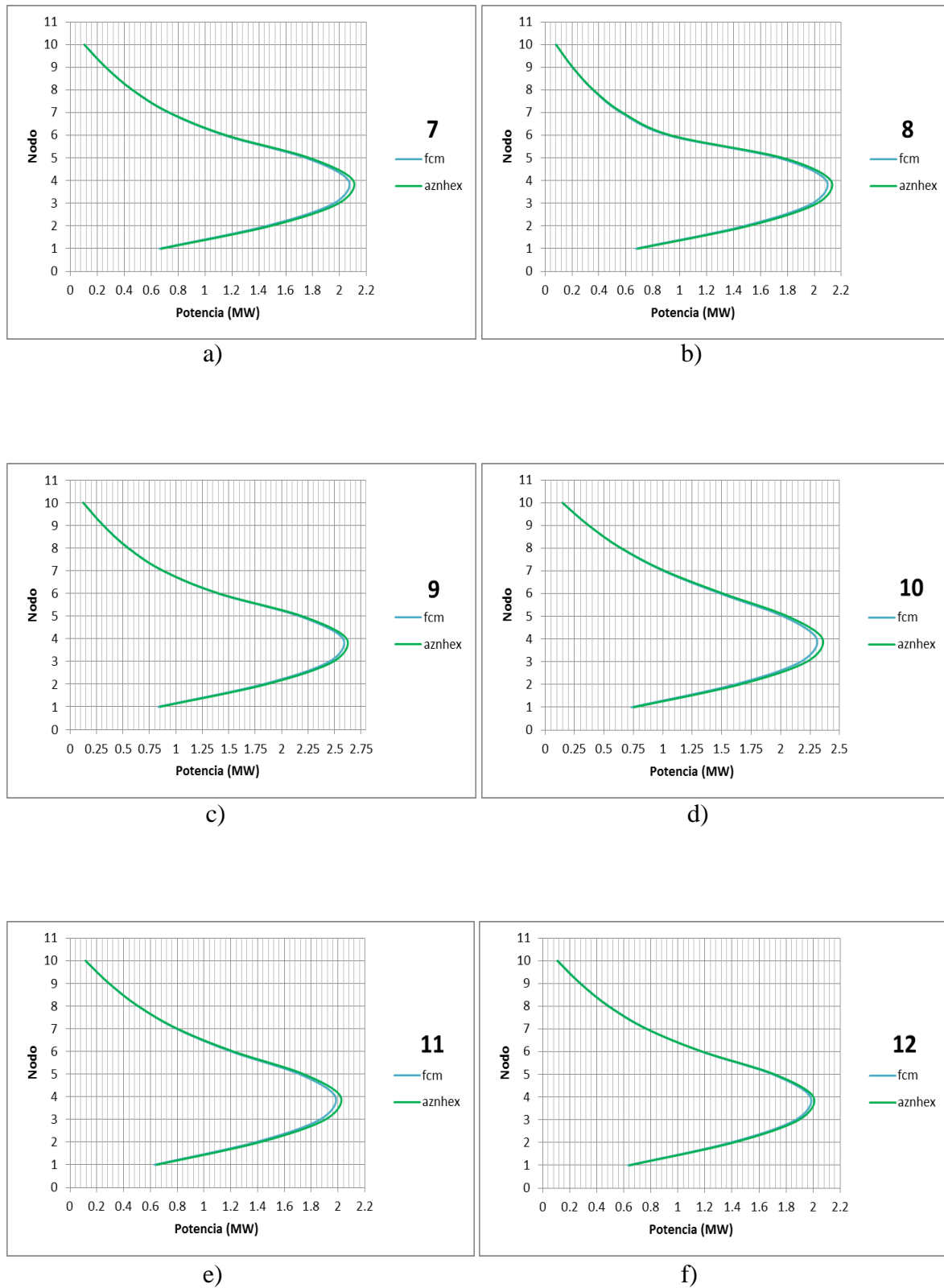


Figura 9.10. Perfil axial de potencia para los ensambles combustible 7 a 12, obtenidos con AZNHEX y los reportados con FCM.

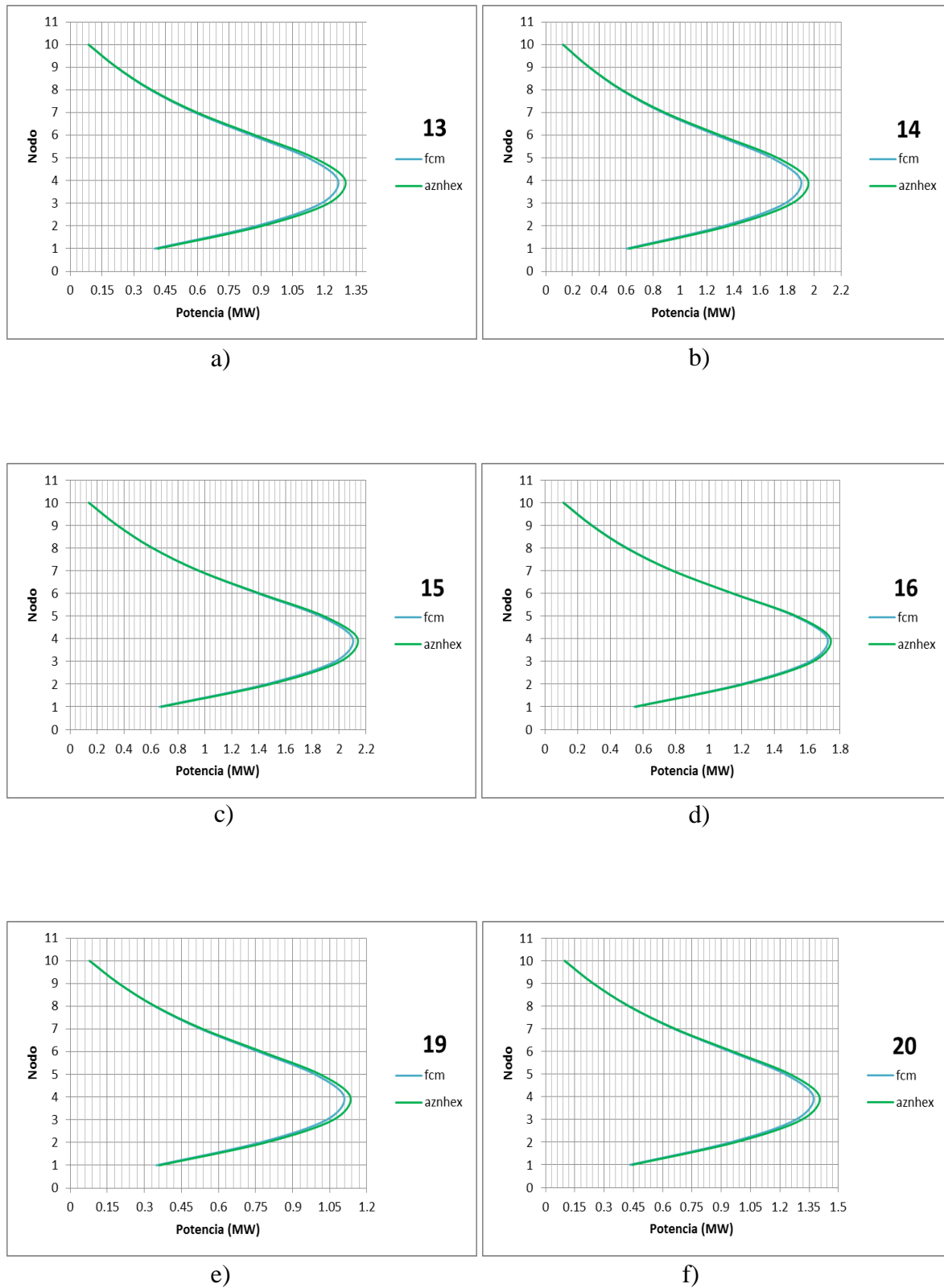


Figura 9.11. Perfil axial de potencia para los ensambles combustible 13 a 20, obtenidos con AZNHEX y los reportados con FCM.

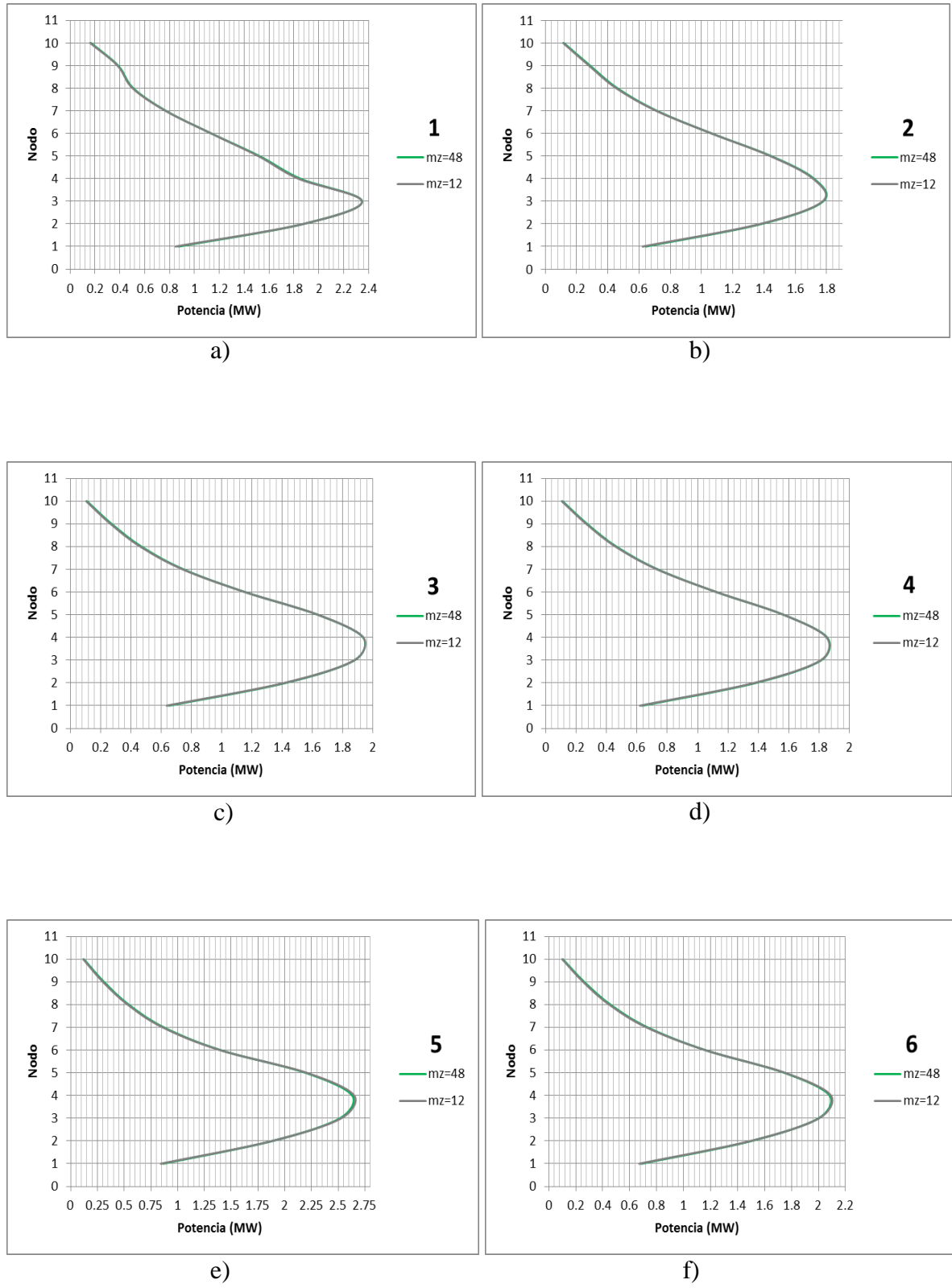


Figura 9.12. Perfil axial de potencia para los ensambles combustible 1 a 6, obtenidos con AZNHEX usando mallas en z de 12 y 48.

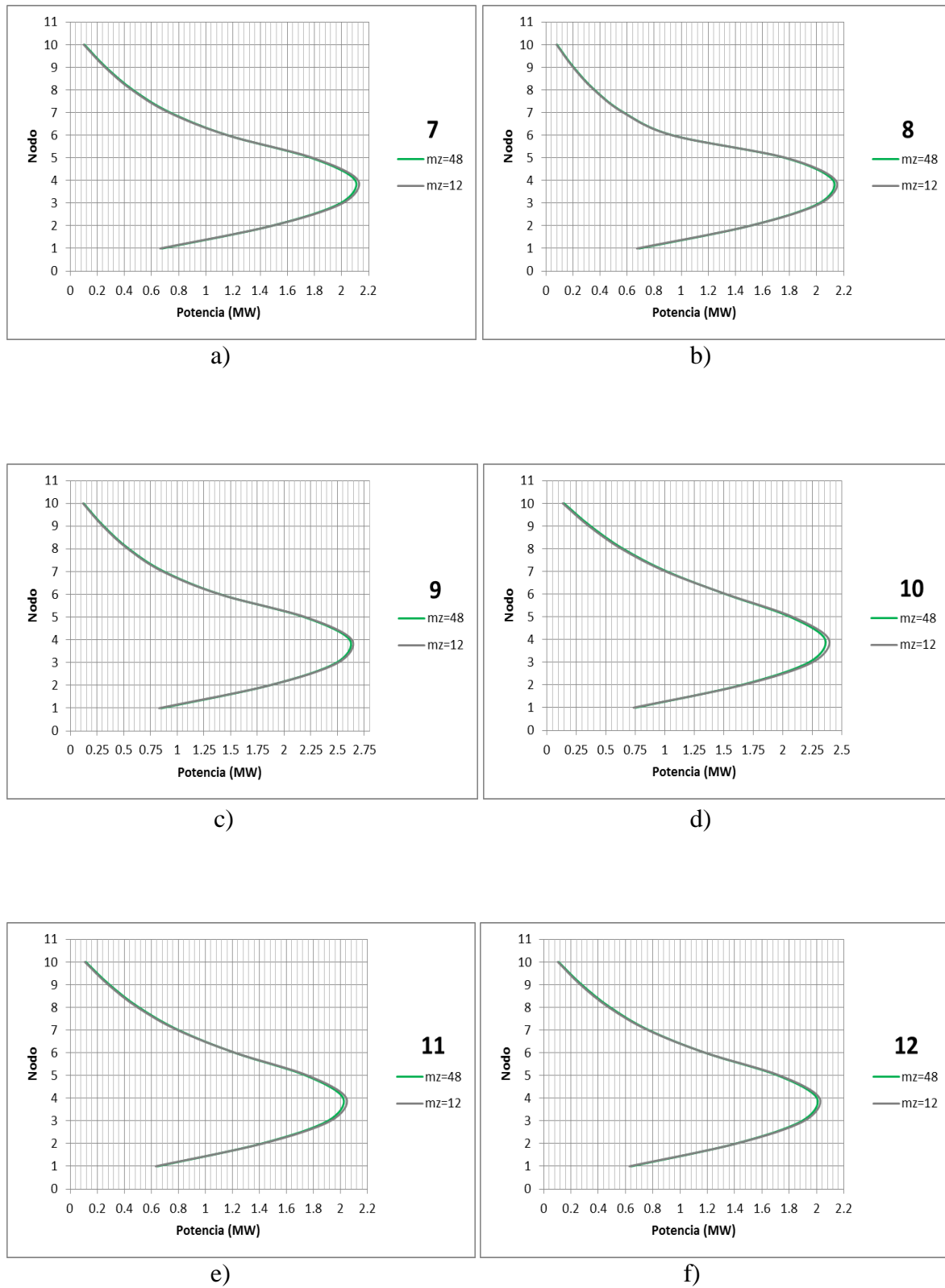
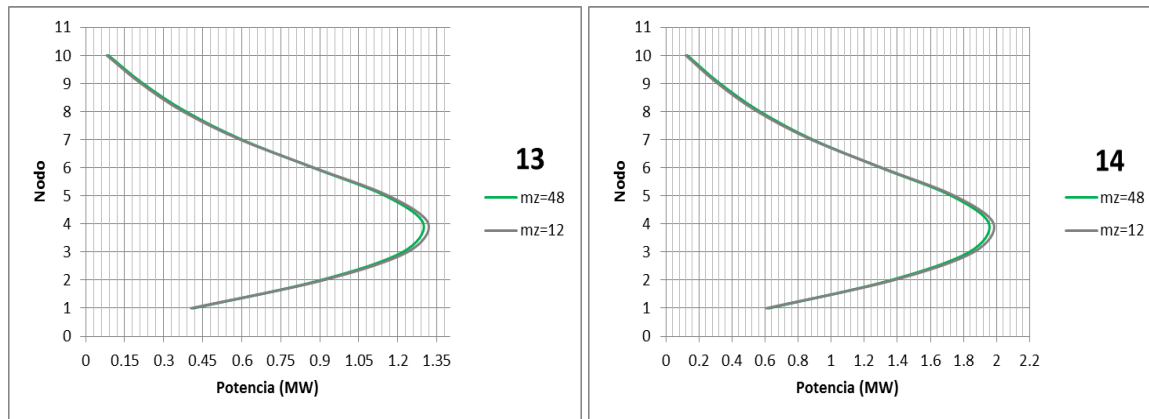
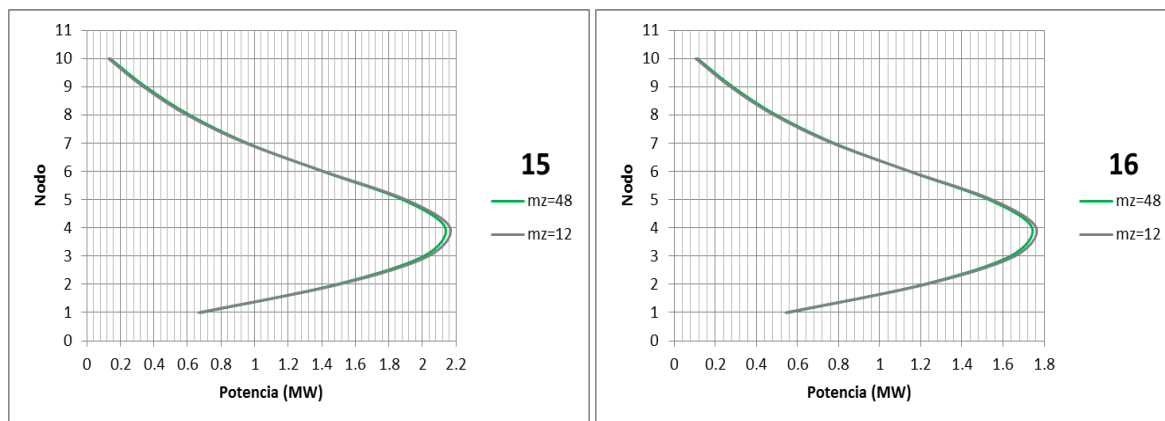


Figura 9.13. Perfil axial de potencia para los ensambles combustible 7 a 12, obtenidos con AZNHEX usando mallas en z de 12 y 48.



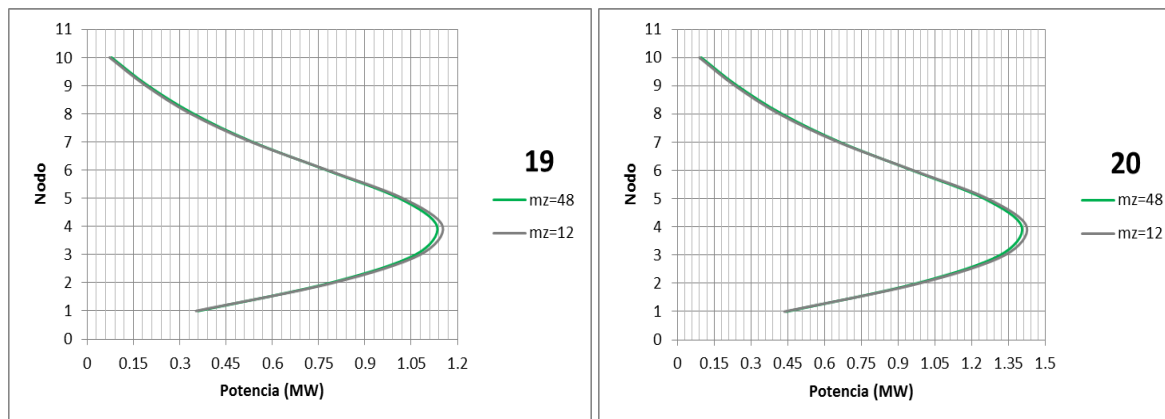
a)

b)



c)

d)



e)

f)

Figura 9.14. Perfil axial de potencia para los ensambles combustible 13 a 20, obtenidos con AZNHEX usando mallas en z de 12 y 48.

9.2 RESULTADOS PARA EL REACTOR FBR CON GEOMETRÍA HEXAGONAL-Z EN EL NÚCLEO

Este problema fue resuelto con AZNHEX usando una malla espacial de 18x18x25. Los resultados obtenidos se comparan con los obtenidos usando el código PARCS [35] y se muestran en la Tabla 9.2 donde la máxima diferencia se obtuvo para el primer caso, en el cual todas las barras de control están extraídas y a medida que éstas son insertadas, casos 2 y 3, esta diferencia va siendo cada vez menor como se puede ver en la última columna de esta tabla.

Tabla 9.2. Comparativo de la k_{eff} obtenida con PARCS y AZNHEX.

Caso de Estudio	PARCS	AZNHEX	Diferencia (%)
Caso 1: <i>Con las Barras de Control extraídas</i>	1.074046	1.048129	2.41
Caso 2: <i>Barras de Control extraídas a la mitad</i>	0.958441	0.957055	0.14
Caso 3: <i>Barras de Control insertadas</i>	0.844319	0.843969	0.04

9.3 RESULTADOS PARA EL REACTOR VVER-440 CON DEPENDENCIA EN TIEMPO

Finalmente, en esta sección se muestran los resultados obtenidos para el único problema dependiente del tiempo analizado. Las Figuras 9.15 a 9.18 muestran los mapas radiales de potencia a diferentes pasos de tiempo ($t = 0s, 0.125s, 0.5s$ y $1.0s$).

Se puede observar que en el mapa que corresponde a $t = 0s$, la distribución de potencia es simétrica respecto del eje y y que conforme el tiempo avanza ésta se va perdiendo y se recupera después de los $0.25s$, tiempo en el que las barras de control vuelven a su posición inicial después de haberlas mantenido extraídas.

Adicionalmente, las Figuras 9.19 y 9.20 muestran el comportamiento de la potencia para dos transitorios, el primero donde las secciones de remoción de todas las barras de control cambian en forma de escalón en -0.5% durante los primeros $0.25s$ y el segundo donde las secciones de remoción de todas las barras de control cambian en forma de escalón en -1.0% durante los primeros $0.25s$. En ambas figuras se aprecia que el pico de potencia ocurre justamente cuando las barras de control regresan a su posición inicial.

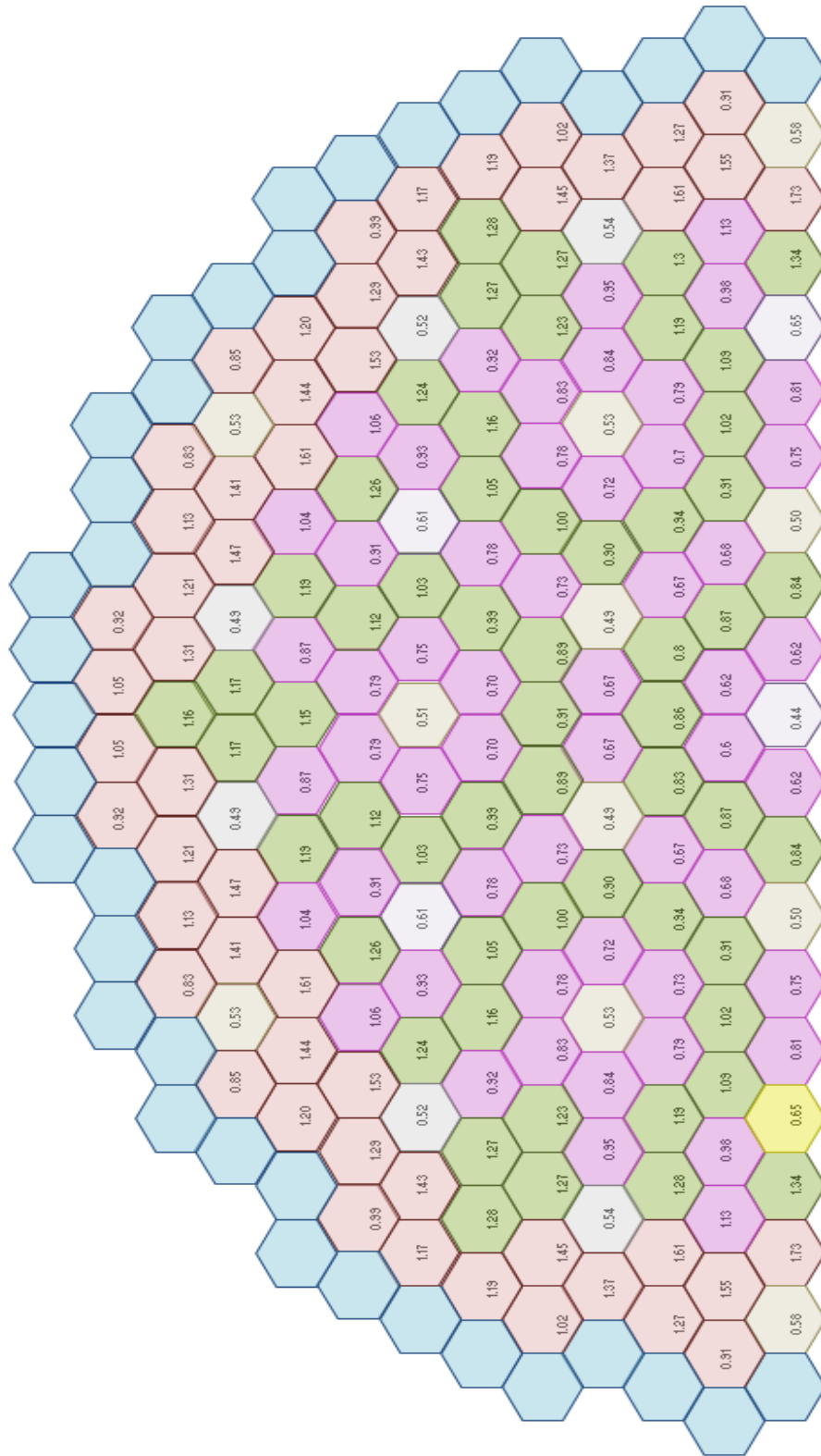


Figura 9.15. Mapa radial de potencia para el núcleo del reactor VVER-440 a $t = 0s$.

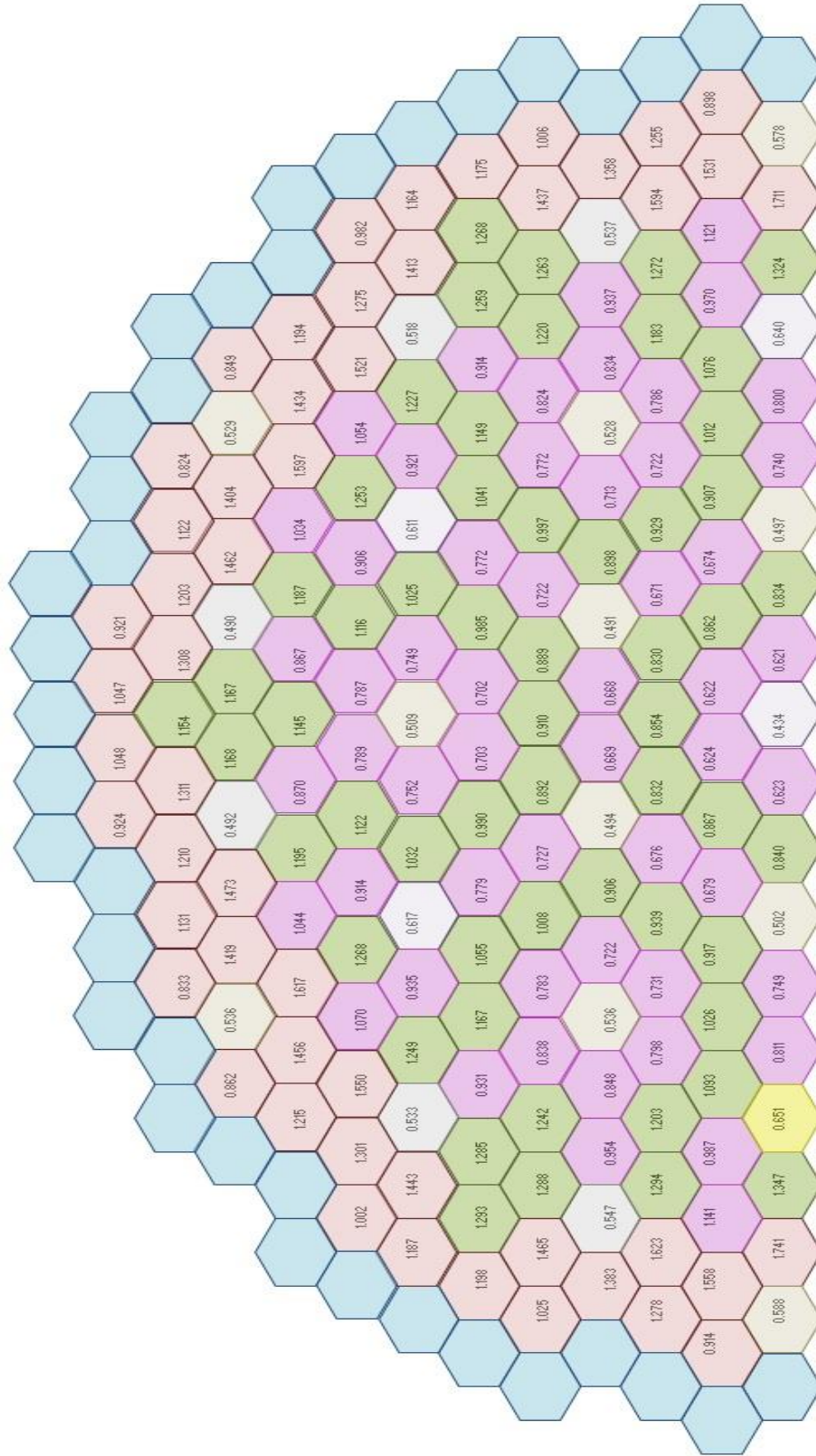


Figura 9.16. Mapa radial de potencia para el núcleo del reactor VVER–440 a $t = 0.125s$.

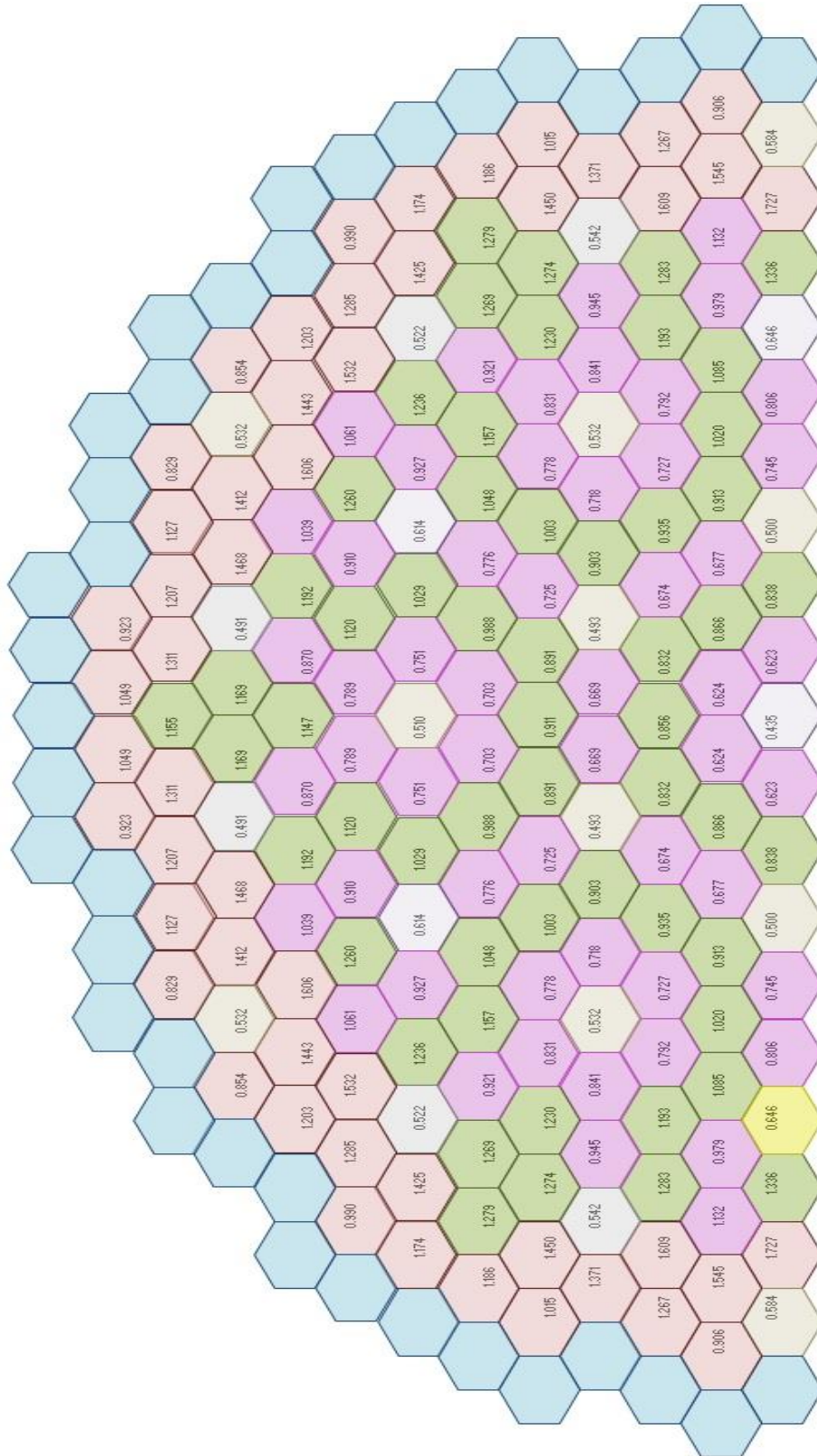


Figura 9.17. Mapa radial de potencia para el núcleo del reactor VVER-440 a $t = 0.5s$.

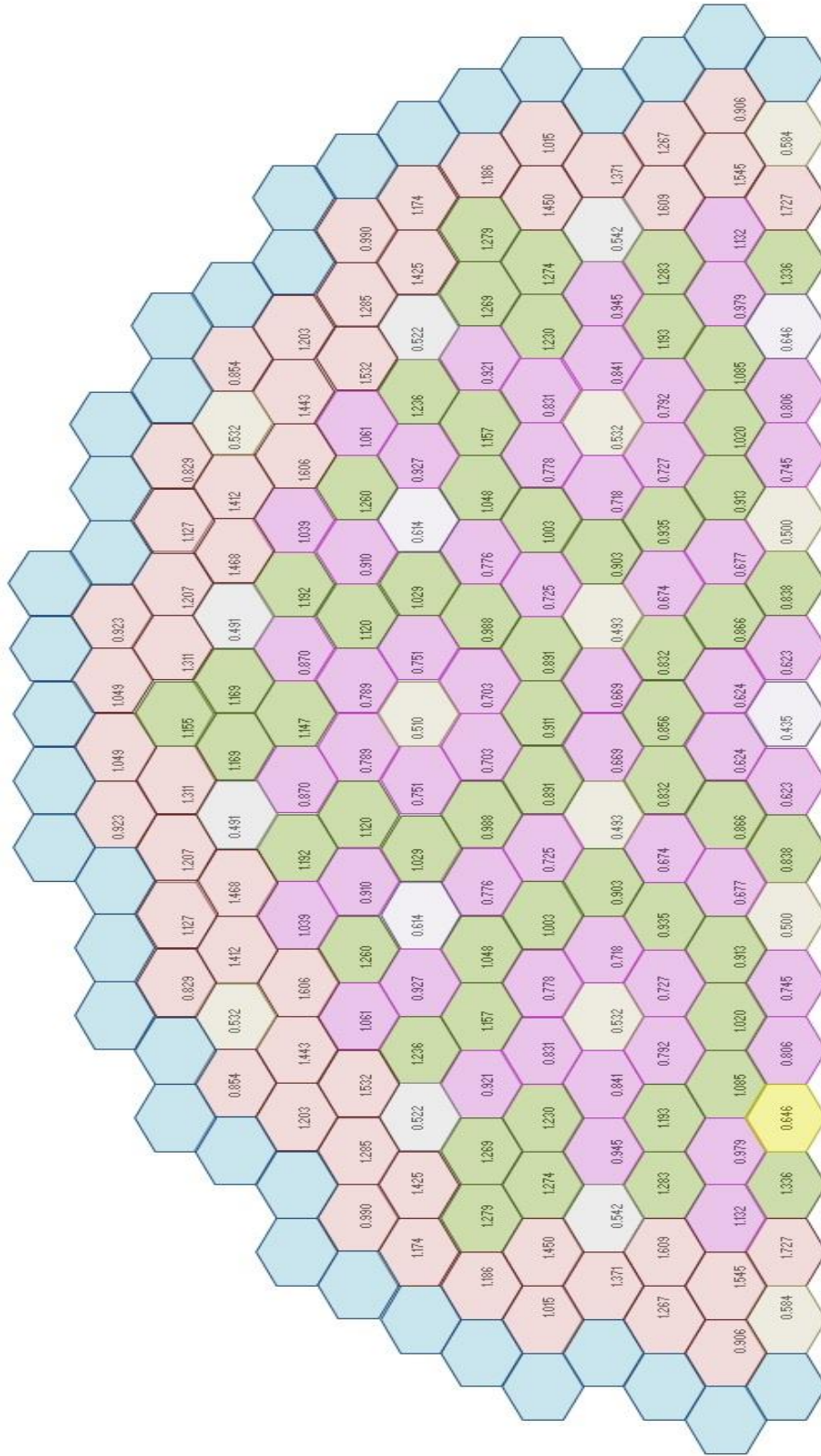


Figura 9.18. Mapa radial de potencia para el núcleo del reactor VVER-440 a $t = 1.0s$.

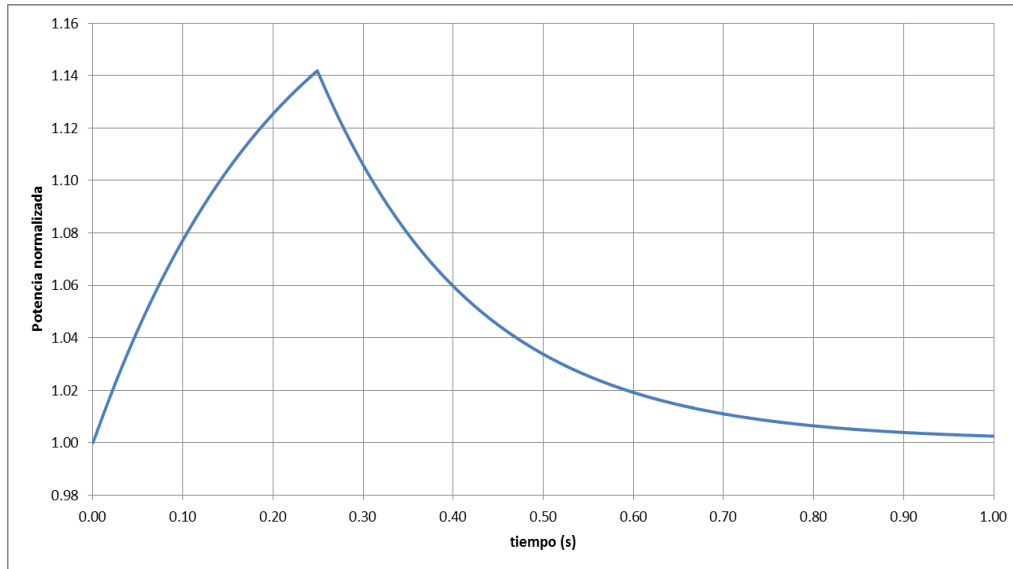


Figura 9.19. Comportamiento en el tiempo de la potencia normalizada del núcleo para el reactor VVER-440 donde las secciones de remoción de todas las barras de control cambian en forma de escalón en -0.5% durante los primeros $0.25s$.

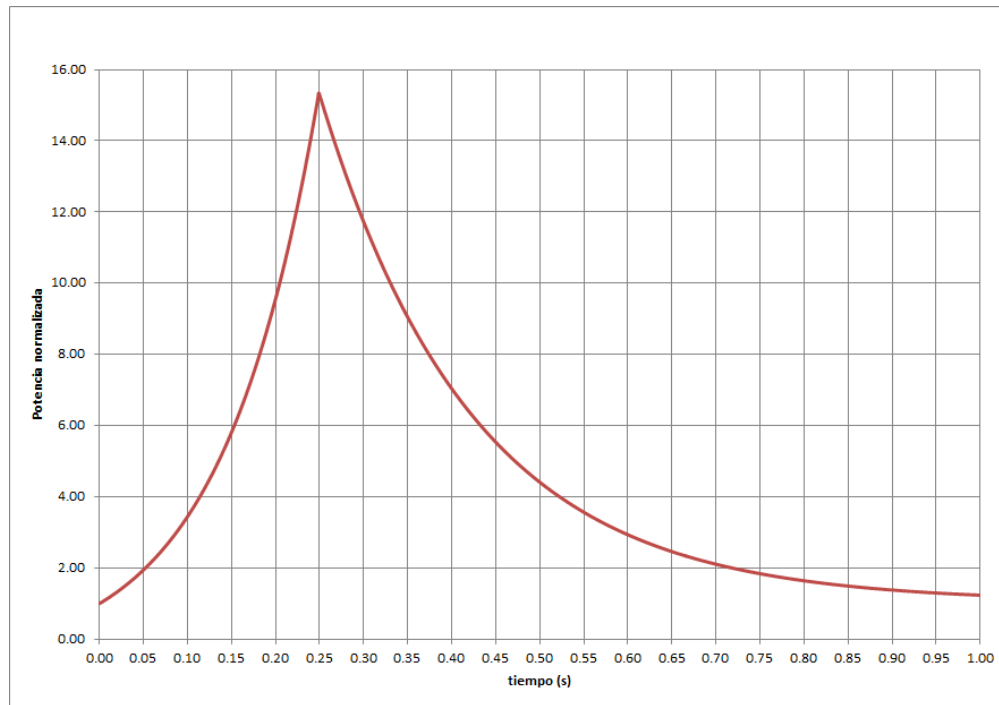


Figura 9.20. Comportamiento en el tiempo de la potencia normalizada del núcleo para el reactor VVER-440 donde las secciones de remoción de todas las barras de control cambian en forma de escalón en -1.0% durante los primeros $0.25s$.

CAPÍTULO **10**

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

CONCLUSIONES

El núcleo de algunos reactores avanzados está formado por la unión de ensambles cuya sección transversal es hexagonal. Para su diseño neutrónico, como para el estudio de su desempeño tanto en casos estacionarios como en casos con dependencia en tiempo, es preciso contar con una herramienta de cómputo o en todo caso desarrollarla. Así, en este trabajo se desarrolló un programa de cómputo denominado AZNHEX que resuelve las ecuaciones de difusión dependientes del tiempo para varios grupos de energía, incluyendo las correspondientes a las concentraciones de precursores de neutrones retardados. AZNHEX fue desarrollado en lenguaje Fortran para obtener en forma aproximada el factor efectivo de multiplicación de neutrones, las distribuciones axiales y radiales de la potencia, así como del flujo de neutrones, esto para núcleos formados por la unión de elementos prismáticos de base hexagonal.

En su proceso de desarrollo, AZNHEX fue probado, primeramente, con problemas modelo que permitieron verificar:

- a) que cuando las condiciones de frontera de un reactor homogéneo son de corriente cero en todas las caras, es decir que no tiene fugas, entonces el resultado correspondiente para la k_{eff} es justamente la k_{∞} analítica.
- b) que bajo las condiciones mencionadas en el inciso a), el programa reproduce el resultado analítico para la potencia que se obtiene con el modelo de la cinética puntual, ya que el flujo de neutrones en el núcleo, se vuelve independiente de la posición.
- c) que una vez resuelto el estado crítico inicial, el cual corresponde al del estado estacionario, la potencia del reactor se mantenía constante cuando no se realizaba ninguna modificación al núcleo.

d) que bajo un aumento de la remoción térmica, lo que equivale a una extracción de barra de control, la potencia decrecía y que al disminuir la remoción térmica, lo que equivale a una inserción de barra de control, la potencia crecía.

AZNHEX fue probado con dos problemas benchmark (PB) independientes del tiempo y uno dependiente del tiempo. Para el primer PB, los resultados obtenidos para el factor efectivo de multiplicación k_{eff} , difieren con el de referencia a lo más en 0.039% para la malla más fina y de 0.023% para la más gruesa. No obstante que las distribuciones radiales de potencia, difieren en aproximadamente un 2.6% y los perfiles axiales son muy parecidos a los de la referencia correspondiente. Para el segundo PB independiente del tiempo, el factor efectivo de multiplicación de neutrones obtenido, tuvo diferencias porcentuales hasta del 2.5% en el caso donde las barras de control están completamente extraídas y de 0.04% cuando están completamente insertadas. Una probable explicación a la diferencia tan alta, en el caso donde las barras de control están completamente extraídas, es la limitación en AZNHEX para llevar a cabo refinamientos de malla dentro de los hexágonos.

En el caso del problema dependiente del tiempo, éste fue modificado para poder simularlo en AZNHEX ya que hasta este momento no incluye el modelado de la inserción o extracción de barras de control. Así, en un primer escenario de este problema la modificación consistió en suponer que en todas las localidades donde están ubicadas las barras de control, las secciones de remoción térmicas respectivas cambiaron en forma de escalón en un -0.5%, lo cual corresponde a un movimiento de extracción de todas las barras de control. Este escenario permitió comprobar que AZNHEX preserva la simetría que originalmente tiene y que la potencia crece. El segundo escenario considerado consistió en suponer que, en las localidades donde están ubicadas las barras de control del lado izquierdo, incluyendo las que se encuentran en el eje y, las secciones de remoción térmicas respectivas cambiaron en forma de escalón en un -1.0% lo cual corresponde a un movimiento de extracción de dichas barras de control. Este escenario permitió comprobar que AZNHEX reproduce el comportamiento esperado ya que la simetría respecto del eje y se pierde y que la distribución radial de potencia hacia el lado izquierdo crece, mientras que hacia el lado derecho decrece o se mantiene.

El problema dependiente del tiempo permitió verificar la conservación de la simetría en los cálculos de la distribución radial de potencia.

RECOMENDACIONES

El programa desarrollado AZNHEX sentará las bases para realizar diversos estudios encaminados al cálculo y diseño de reactores nucleares cuyos núcleos estén formados por la unión de prismas de base hexagonal, una vez que éste sea validado con un amplio número de problemas benchmark dentro de los cuales destacan algunos como el de caída de barra de control.

En futuros trabajos, AZNHEX deberá considerar efectos de retroalimentación neutrónicos y termohidráulicos. Se recomienda someterlo a un número exhaustivo de pruebas que permitan identificar sus debilidades para buscarles solución. También es importante agregarle al menos el esquema nodal RTN-1 y la posibilidad de refinar la malla espacial no sólo en la dirección axial, sino también en las direcciones x y y , *i.e.* hacia el interior de cada hexágono e incluir un control adaptativo sobre el paso de tiempo. Finalmente es altamente recomendable incorporarle un método nodal exponencial basado en la familia RTN (Raviart-Thomas-Nédélec).

REFERENCIAS

- [1] A. F. Henry, *Nuclear Reactor Analysis*, The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, (1975).
- [2] J. J. Duderstadt, I. J. Hamilton, *Nuclear Reactor Analysis*, Jhon Wiley & Sons, New York, (1976).
- [3] J. R. Lamarsh, *Introduction to Nuclear Reactor Theory*, Addison-Wesley Pub. Co., (1996).
- [4] E. del Valle G., “Aplicación del método de elementos finitos a la dinámica de reactores nucleares”, *Tesis de Maestría*, Instituto Politécnico Nacional, E.S.F.M., Departamento de Ingeniería Nuclear, (1981).
- [5] A. Rodríguez H. “Solución numérica de las ecuaciones de la cinética 3D de reactores nucleares usando el método nodal RTN-0”, *Tesis de Maestría*, Instituto Politécnico Nacional, E.S.F.M., Departamento de Ingeniería Nuclear, (2002).
- [6] C. Filio L., “Solución numérica de la ecuación de transporte de neutrones en geometría X-T”, *Tesis de Maestría*, Instituto Politécnico Nacional, E.S.F.M., Departamento de Ingeniería Nuclear, (1993).
- [7] A. Delfín, E. del Valle, J. P. Hennart, “Discontinuous nodal finite element schemes for the discrete-ordinates neutron transport equation in X-Y geometry”, *2nd Texas-Mexico Workshop on Numerical Particle Transport College Station, Texas, U.S., September 3 – 5*, (1992).
- [8] E. del Valle, J. P. Hennart, D. Meade, “Finite element formulations of nodal schemes for neutron diffusion and transport problems”, *Nuclear Science and Engineering*, **92**, 204 – 211, (1986).
- [9] P. Lesaint, P. A. Raviart, *On a finite element method for solving the neutron transport equation in mathematical aspects of finite elements in partial differential equations*, 89, C. De Boor E., Academic Press, New York, (1974).

- [10] J. P. Hennart, “A general family of nodal schemes”, *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, **Vol. 7**, No. 1, 264 – 287, (1986).
- [11] F. Brezzi, J. Douglas, L. D. Marini, “Two families of mixed finite elements for second order elliptic problems”, *Numer. Math.*, **47**, 217 – 235, (1985).
- [12] P. A. Raviart, J. M. Thomas, “A mixed finite element method for 2nd order elliptic equations”, *Lecture Notes in Mathematics*, **606**, 292, (1997).
- [13] R. D. Lawrence, “Progress in nodal methods for the solution of the neutron diffusion and transport equations”, *Progress in Nuclear Energy*, **17**, 271 – 301, (1986).
- [14] J. Gadó, F. Schmidt, “Solution of the neutron diffusion equation in hexagonal geometries”, *Ann. Nucl. Energy*, **14**, 83 – 97, (1987).
- [15] R. D. Lawrence, “The DIF3D nodal neutronics option for two- and three-dimensional diffusion theory calculations in hexagonal geometry”, *ANL-83-1*, Argonne National Laboratory, (1983).
- [16] R. D. Lawrence, “A nodal method for three-dimensional fast reactor calculations in hexagonal geometry”, *Proc. Conf. Advances in Reactor Computations*, Salt Lake City, American Nuclear Society, 2, 1030 – 1045, , (1983).
- [17] M. R. Wagner, “Three-dimensional nodal diffusion and transport theory methods for hexagonal-z geometry”, *Nucl. Sci. Engng.*, **103**, 377 – 391, (1989).
- [18] Y. A. Chao, “Comments on the treatment of transverse leakage in advanced nodal codes for hexagonal nodes”, *Nucl. Sci. Engng.*, **109**, 423 – 424, (1991).
- [19] Y. A. Chao, Y. A. Shatilla, “Conformal mapping and hexagonal nodal methods-II implementation in the ANC-H Code”, *Nucl. Sci. Engng.*, **121**, 210 – 225, (1995).
- [20] M. Knight, P. Hutt, I. Lewis, “Comparision of PANTHER nodal solutions in hexagonal-z geometry”, *Nucl. Sci. Engng.*, **121**, 254 – 263, (1995).
- [21] J. P. Hennart, E. del Valle, “On the relationship between nodal schemes and mixed-hybrid finite elements”, *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, **Vol. 9**, 411 – 430, (1993).

- [22] J. P. Hennart, E. M. Malambu, H. E. Mund, E. del Valle, “Efficient higher order nodal finite element formulations for neutron multigroup diffusion equations”, *Nucl. Sci. and Engng.*, **124**, 97 – 110, (1996).
- [23] J. P. Hennart, H. E. Mund, “Singularities in the finite element approximation of two-dimensional diffusion problems”, *Nucl. Sci. Engng.*, **62**, 55 – 68, (1977).
- [24] P. G. Ciarlet, *The finite element method for elliptic problems*, North-Holland, Amsterdam, (1978).
- [25] W. J. Gordon, C. A. Hall, “Transfinite element methods: blending-function interpolation over arbitrary curved element domains”, *Numer. Math.*, **21**, 109 – 129, (1973).
- [26] W. J. Gordon, C. A. Hall, “Construction of curvilinear coordinate systems and applications to mesh generation”, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, **7**, 461 – 477, (1973).
- [27] J. M. Noh, N. Z. Cho, “A new diffusion nodal method based on analytical basis function expansion”, *TANS*, **69**, 462 – 463, (1993).
- [28] J. P. Hennart, H. E. Mund, “On the h- and p- versions of the extrapolated Cordon’s projector with applications to elliptic equations”, *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, **9**, 773 – 791, (1988).
- [29] G. Schulz, “Solutions of a 3D VVER-1000 benchmark”, *Proc. 6-th Symposium of AER on VVER Reactor Physics and Safety*, Kirkkonummi, Finland, (1996).
- [30] N. P. Kolev, R. Lenain, C. Magnaud, “AER Benchmark Specification Sheet”, *Test ID.: AER-FCM-101*, (1999).
- [31] J. Esquivel-Estrada, E. del Valle G., “NodHex3D: una aplicación para solucionar las ecuaciones de difusión de neutrones en geometría hexagonal-Z y estado estacionario”, *XXV Congreso Anual de la Sociedad Nuclear Mexicana*. Veracruz, México, del 31 de Agosto al 4 Septiembre, (2014).
- [32] T. Takeda, H. Ikeda, “3-D Neutron transport benchmarks”, *NEACRP-L-330 OECD/NEA Committee on Reactor Physics*, (1991).
- [33] A. Keresztúri, M. Telbisz, I. Vidoszky, “Results of a three-dimensional hexagonal kinetic benchmark problem”, *Regional Meeting: Nuclear Energy in central Europe*, June 13 – 16, Portoroz, Eslovenia, (1993).

- [34] A. Keresztúri, Gy. Hegyi, Cs. Marázcy, I. Panka, M. Telbisz, I. Trosztel, Cs. Hegedús, “Development and validation of the three-dimensional dynamic code–KIKO3D”, *Annals of Nuclear Energy*, **30**, 93 – 120, (2003).
- [35] M. del C. Reyes F., E. del Valle G., C. Filio L., “Simulación de un reactor FBR con geometría hexagonal-Z usando el código PARCS 3.1”, *XXIV Congreso Anual de la Sociedad Nuclear Mexicana*. Querétaro, México, del 30 de Junio al 3 de Julio, (2013).

APÉNDICE **A**

LISTADO DEL ARCHIVO DE DATOS DE ENTRADA

En este Apéndice se proporciona el listado correspondiente al archivo de entrada que se utilizó para modelar $\frac{1}{4}$ del núcleo del reactor AER-FCM-101.

Listado

Problema AER-FCM-101 3D 8M, 2G, 25B, 18X18X13
8,2,25,18,18,13,1,1,1,1,1,1,1,0,1,1,1,1,0,0,0,0
24.1
0.0,0.5,0.0,0.5,0.5,0.5
1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1
0.00, 12.05, 24.10, 36.15, 48.20, 60.25, 72.30, 84.35,
96.40,108.45,120.50,132.55,144.60,156.65,168.70,180.75,192.80,204.85
1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1
0.00, 12.05, 24.10, 36.15, 48.20, 60.25, 72.30, 84.35,
96.40,108.45,120.50,132.55,144.60,156.65,168.70,180.75,192.80,204.85
4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4
0.00,35.50,71.00,106.50,142.00,177.50,213.00,248.50,
284.00,319.50,355.00,390.50,426.00
0.0,0.0
25,24,24,23,23,22,22,21,21, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0
25,24,24,23,23,22,22,21,21, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0

4,3,4,3,4,3,4,3,4,3,4,0,0,0,0
2,1,2,1,2,1,2,1,2,1,2,1,0,0,0
3,4,3,4,3,4,3,4,3,4,3,4,0,0,0
1,2,1,2,1,2,1,2,1,2,1,2,1,0,0
4,3,4,3,4,3,4,3,4,3,4,3,4,0,0
2,1,2,1,2,1,2,1,2,1,2,1,2,1,0
3,4,3,4,3,4,3,4,3,4,3,4,3,4,0
1,2,1,2,1,2,1,2,1,2,1,2,1,2,1
8, 7, 7, 4, 4, 4, 4, 4, 7, 7, 7, 8
8, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 8
8, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 8
8, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 8
8, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 8
8, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 8
8, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 8
8, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 8
8, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 8
8, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 8
8, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 8
8, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 8
8, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 8
8, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 8
8, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 8
8, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 8
8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8
8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8
8, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 8
8, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 8
8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8
8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8
8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8
8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8
8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8

! MAT 1

1.37548e+00	3.83330e-01
2.41350e-02	6.60020e-02
4.76630e-03	8.39800e-02
6.01300e+06	1.12310e+08
1.00000e+00	0.00000e+00
0.00000e+00	0.00000e+00
1.59460e-02	0.00000e+00

! MAT 2

1.40950e+00	3.87560e-01
2.47690e-02	7.49880e-02
4.70200e-03	8.41280e-02
5.93050e+06	1.12530e+08
1.00000e+00	0.00000e+00
0.00000e+00	0.00000e+00
1.43460e-02	0.00000e+00

! MAT 3

1.37067e+00	3.80280e-01
2.38000e-02	8.04420e-02
5.84370e-03	1.14680e-01
7.44290e+06	1.53360e+08
1.00000e+00	0.00000e+00
0.00000e+00	0.00000e+00
1.51720e-02	0.00000e+00

! MAT 4

1.39447e+00	3.85490e-01
2.40690e-02	9.47730e-02
6.16320e-03	1.25980e-01
7.87310e+06	1.68480e+08
1.00000e+00	0.00000e+00
0.00000e+00	0.00000e+00
1.39030e-02	0.00000e+00

! MAT 5

1.36938e+00	3.78770e-01
2.36970e-02	8.76810e-02
6.33960e-03	1.29980e-01
8.10140e+06	1.73810e+08
1.00000e+00	0.00000e+00
0.00000e+00	0.00000e+00
1.48550e-02	0.00000e+00

! MAT 6

1.36938e+00	3.78770e-01
2.36970e-02	8.76810e-02
6.33960e-03	1.29980e-01
8.10140e+06	1.73810e+08
1.00000e+00	0.00000e+00
0.00000e+00	0.00000e+00
1.48550e-02	0.00000e+00

! MAT 7

1.36966e+00 3.79110e-01
2.37210e-02 8.58500e-02
6.22840e-03 1.26120e-01
7.95360e+06 1.68660e+08
1.00000e+00 0.00000e+00
0.00000e+00 0.00000e+00
1.49270e-02 0.00000e+00
! MAT 8
1.00000e+00 3.33330e-01
4.06440e-02 5.27850e-02
0.00000e-00 0.00000e-00
0.00000e-00 0.00000e-00
1.00000e+00 0.00000e+00
0.00000e+00 0.00000e+00
2.48750e-02 0.00000e+00
500,1.0e-07
1,7
0,1
0.1,0.0001
0.1,0.0,0.0,0.0,0.005
0.0,0.0,0.0,0.0,0.0
0.0,0.0,0.0,0.0,0.0
0.0,0.0,0.0,0.0,0.0
0.0,0.0,0.0,0.0,0.0
0.0,0.0,0.0,0.0,0.0
0.0,0.0,0.0,0.0,0.0
0.0,0.0,0.0,0.0,0.0
1.250E+8,1.0E+07
0.00647
31.27
0.5
-1.0
0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0
0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0
0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0
0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0
0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0
0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0
0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0
0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0
0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0
0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0
0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0

0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0
0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0
0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0
1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0
1,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0
1,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0
1,1,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0
1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1
17,9
57,-1,58,-1,59,-1,60,-1,61,-1,-1,-1,-1,-1,-1,-1
-1,52,-1,53,-1,54,-1,55,-1,56,-1,-1,-1,-1,-1,-1,-1
46,-1,47,-1,48,-1,49,-1,50,-1,51,-1,-1,-1,-1,-1,-1
-1,40,-1,41,-1,42,-1,43,-1,44,-1,45,-1,-1,-1,-1,-1
33,-1,34,-1,35,-1,36,-1,37,-1,38,-1,39,-1,-1,-1,-1
-1,26,-1,27,-1,28,-1,29,-1,30,-1,31,-1,32,-1,-1,-1
18,-1,19,-1,20,-1,21,-1,22,-1,23,-1,24,-1,25,-1,-1
-1,10,-1,11,-1,12,-1,13,-1,14,-1,15,-1,16,-1,17,-1
1, -1, 2, -1, 3, -1, 4,-1, 5,-1, 6,-1, 7,-1, 8,-1, 9

Problema AER–FCM–1013D (fin)

APÉNDICE **B**

LISTADO DEL ARCHIVO DE SALIDA

En este apéndice se proporciona el listado correspondiente al archivo de salida que se utilizó para modelar $\frac{1}{4}$ del núcleo del reactor AER-FCM-101.

Listado

NO. DE MATERIALES	=	8
NO. DE GRUPOS DE ENERGIA	=	2
NO. DE ENSAMBLES COMB.	=	25
NO. DE ELEMENTOS EN X	=	17
NO. DE ELEMENTOS EN Y	=	17
NO. DE ELEMENTOS EN Z	=	12
C.F. CARA IZQUIERDA	=	1
C.F. CARA DERECHA	=	1
C.F. CARA MAS CERCANA	=	1
C.B. CARA MAS LEJANA	=	1
C.F. CARA INFERIOR	=	1

C.F. CARA SUPERIOR = 1
INDICE DE FAMILIA NODAL = 1
INDICE DE ESQUEMA NODAL = 0

lst: 0

*****ADVERTENCIA*****
ESTA VERSION LEE D DIRECTAMENTE

*****ADVERTENCIA*****
ESTA VERSION USA LA MATRIZ DE DISPERSION DIRECTAMENTE

lst: 0 ISM: 0

PARAMETROS DE ITERACION

NO. MAX DE ITERACIONES EXTERNAS. = 500

ERROR. REL. MAX EN KEFF PARA ITER. EXTERNAS = 1.000E-06

DATOS DE COMPOSICION

25	24	24	23	23	22	22	21	21	0	0	0	0	0	0	0
25	24	24	23	23	22	22	21	21	0	0	0	0	0	0	0
20	20	19	19	18	18	17	17	22	22	0	0	0	0	0	0
20	20	19	19	18	18	17	17	22	22	0	0	0	0	0	0
16	15	15	14	14	13	13	18	18	23	23	0	0	0	0	0
16	15	15	14	14	13	13	18	18	23	23	0	0	0	0	0
12	12	11	11	10	10	14	14	19	19	24	24	0	0	0	0
12	12	11	11	10	10	14	14	19	19	24	24	0	0	0	0
9	8	8	7	7	11	11	15	15	20	20	25	25	0	0	0
9	8	8	7	7	11	11	15	15	20	20	25	25	0	0	0
6	6	5	5	8	8	12	12	16	16	20	20	24	24	0	0
6	6	5	5	8	8	12	12	16	16	20	20	24	24	0	0
4	3	3	6	6	9	9	12	12	15	15	19	19	23	23	0

4 3 3 6 6 9 9 12 12 15 15 19 19 23 23 0 0
 2 2 4 4 6 6 8 8 11 11 14 14 18 18 22 22 0
 2 2 4 4 6 6 8 8 11 11 14 14 18 18 22 22 0
 1 2 2 3 3 5 5 7 7 10 10 13 13 17 17 21 21

MAPA CUADRANTES

1 2 1 2 1 2 1 2 1 0 0 0 0 0 0 0
 4 3 4 3 4 3 4 3 4 0 0 0 0 0 0 0
 2 1 2 1 2 1 2 1 2 1 0 0 0 0 0 0
 3 4 3 4 3 4 3 4 3 4 0 0 0 0 0 0
 1 2 1 2 1 2 1 2 1 2 1 0 0 0 0 0
 4 3 4 3 4 3 4 3 4 3 4 0 0 0 0 0
 2 1 2 1 2 1 2 1 2 1 2 1 0 0 0 0
 3 4 3 4 3 4 3 4 3 4 3 4 0 0 0 0
 1 2 1 2 1 2 1 2 1 2 1 2 1 0 0 0
 4 3 4 3 4 3 4 3 4 3 4 3 4 0 0 0
 2 1 2 1 2 1 2 1 2 1 2 1 2 1 0 0
 3 4 3 4 3 4 3 4 3 4 3 4 3 4 0 0
 1 2 1 2 1 2 1 2 1 2 1 2 1 2 1 0
 4 3 4 3 4 3 4 3 4 3 4 3 4 3 4 0
 2 1 2 1 2 1 2 1 2 1 2 1 2 1 2 1
 3 4 3 4 3 4 3 4 3 4 3 4 3 4 3 4
 1 2 1 2 1 2 1 2 1 2 1 2 1 2 1 2

SECC. TRANSVERSALES

MATERIAL 1

XK	G	D XP	SR	SF
	1	1.3754800E+00	2.4135000E-02	4.7663000E-03
6.0130000E+06		1.0000000E+00		
	2	3.8333000E-01	6.6002000E-02	8.3980000E-02
1.1231000E+08		0.0000000E+00		

G SS (GP, G)

	1	0.0000000E+00	0.0000000E+00
	2	1.5946000E-02	0.0000000E+00
MATERIAL 2			

XK	G	D XP	SR	SF
	1	1.4095000E+00	2.4769000E-02	4.7020000E-03
5.9305000E+06		1.0000000E+00		
	2	3.8756000E-01	7.4988000E-02	8.4128000E-02
1.1253000E+08		0.0000000E+00		

G SS (GP, G)

	1	0.0000000E+00	0.0000000E+00
	2	1.4346000E-02	0.0000000E+00
MATERIAL 3			

XK	G	D XP	SR	SF
	1	1.3706700E+00	2.3800000E-02	5.8437000E-03
7.4429000E+06		1.0000000E+00		
	2	3.8028000E-01	8.0442000E-02	1.1468000E-01
1.5336000E+08		0.0000000E+00		

G SS (GP, G)

	1	0.0000000E+00	0.0000000E+00
	2	1.5172000E-02	0.0000000E+00
MATERIAL 4			

XK	G	D XP	SR	SF
----	---	---------	----	----

1	1.3944700E+00	2.4069000E-02	6.1632000E-03
7.8731000E+06	1.0000000E+00		
2	3.8549000E-01	9.4773000E-02	1.2598000E-01
1.6848000E+08	0.0000000E+00		

G SS (GP,G)

1	0.0000000E+00	0.0000000E+00
2	1.3903000E-02	0.0000000E+00

MATERIAL 5

XK	G	D XP	SR	SF
----	---	---------	----	----

1	1.3693800E+00	2.3697000E-02	6.3396000E-03
8.1014000E+06	1.0000000E+00		
2	3.7877000E-01	8.7681000E-02	1.2998000E-01
1.7381000E+08	0.0000000E+00		

G SS (GP,G)

1	0.0000000E+00	0.0000000E+00
2	1.4855000E-02	0.0000000E+00

MATERIAL 6

XK	G	D XP	SR	SF
----	---	---------	----	----

1	1.3693800E+00	2.3697000E-02	6.3396000E-03
8.1014000E+06	1.0000000E+00		
2	3.7877000E-01	8.7681000E-02	1.2998000E-01
1.7381000E+08	0.0000000E+00		

G SS (GP,G)

1	0.0000000E+00	0.0000000E+00
2	1.4855000E-02	0.0000000E+00

MATERIAL 7

XK	G	D XP	SR	SF
----	---	---------	----	----

1	1.3696600E+00	2.3721000E-02	6.2284000E-03
7.9536000E+06	1.0000000E+00		

2 3.7911000E-01 8.5850000E-02 1.2612000E-01
 1.6866000E+08 0.0000000E+00

G SS (GP,G)

1 0.0000000E+00 0.0000000E+00
 2 1.4927000E-02 0.0000000E+00

MATERIAL 8

XK G D SR SF
 XP

1 1.0000000E+00 4.0644000E-02 0.0000000E+00
 0.0000000E+00 1.0000000E+00
 2 3.3333000E-01 5.2785000E-02 0.0000000E+00
 0.0000000E+00 0.0000000E+00

G SS (GP,G)

1 0.0000000E+00 0.0000000E+00
 2 2.4875000E-02 0.0000000E+00

NUMERO DE ELEMENTOS 2604
 NUMERO DE PUNTOS 11041
 NUMERO DE ECUACIONES 11041
 ANCHO DE BANDA MEDIO 1120

PARAMETROS CINETICOS

G V
 1 1.2500000E+08
 2 1.0000000E+07

I BETA LAMDA
 1 6.4700000E-03 3.1270000E+01

BT = 6.470E-03

DESCRIPCION DEL TRANSITORIO

TIEMPO TOTAL = 1.000E-01 SEGS. PASO DE TIEMPO = 1.000E-04 SEGS.

- 1 PASOS ENTRE IMPRESIONES
- 7 TIPOS DE PERTURBACION POR REACTIVIDAD

TIPOS DE INSERCIÓN DE REACTIVIDAD

- 1 INSERCIÓN EN ESCALON
- 2 INSERCIÓN EN RAMPA
- 3 INSERCIÓN CUADRÁTICA
- 4 INSERCIÓN SENOIDAL
- 5 INSERCIÓN COSENOIDAL
- 6 INSERCIÓN EXPONENCIAL
- 7 INSERCIÓN EXPONENCIAL ASINTÓTICA

NUMERO DE BARRAS AFECTADAS POR REACTIVIDAD: 1

CAMBIO EN LA SECCIÓN EFICAZ DE ABSORCIÓN DEL GRUPO 2

MAPA DE CAMBIOS EN LA SECCIÓN EFICAZ DE ABSORCIÓN

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

PARAMETROS THETA PARA INTEGRACION EN TIEMPO

TETAF = 5.000E-01

TETAP(1) = 5.000E-01

PROCESO ITERATIVO DE LAS ITERACIONES EXTERNAS
USANDO EL METODO DE WIELANDT

ITEX	RRN (N)	K-EFF (N)	EPS(N)
1	1.8567368E+01	1.0384768E+00	1.7567368E+01
2	2.1024926E+01	1.0453106E+00	1.3235896E-01
3	2.1767886E+01	1.0470874E+00	3.5337128E-02
4	2.2140459E+01	1.0479356E+00	1.7115712E-02
5	2.2362210E+01	1.0484277E+00	1.0015627E-02
6	2.2502350E+01	1.0487339E+00	6.2668542E-03
7	2.2593473E+01	1.0489311E+00	4.0494478E-03
8	2.2653811E+01	1.0490608E+00	2.6705967E-03
9	2.2694336E+01	1.0491476E+00	1.7888846E-03
10	2.2721885E+01	1.0492064E+00	1.2139078E-03
11	2.2740813E+01	1.0492467E+00	8.3303329E-04
12	2.2753939E+01	1.0492746E+00	5.7720384E-04
13	2.2763115E+01	1.0492941E+00	4.0327977E-04
14	2.2769572E+01	1.0493078E+00	2.8367735E-04
15	2.2774144E+01	1.0493176E+00	2.0079729E-04
16	2.2777395E+01	1.0493245E+00	1.4273839E-04
17	2.2779716E+01	1.0493294E+00	1.0187826E-04
18	2.2781376E+01	1.0493329E+00	7.2908241E-05
19	2.2782570E+01	1.0493354E+00	5.2376204E-05
20	2.2783427E+01	1.0493373E+00	3.7623184E-05
21	2.2784045E+01	1.0493386E+00	2.7121384E-05
22	2.2784491E+01	1.0493395E+00	1.9569320E-05
23	2.2784812E+01	1.0493402E+00	1.4113467E-05
24	2.2785045E+01	1.0493407E+00	1.0199545E-05
25	2.2785211E+01	1.0493410E+00	7.3246483E-06
26	2.2785334E+01	1.0493413E+00	5.3711788E-06
27	2.2785421E+01	1.0493415E+00	3.8477765E-06
28	2.2785485E+01	1.0493416E+00	2.8010698E-06
29	2.2785531E+01	1.0493417E+00	2.0177626E-06
30	2.2785564E+01	1.0493418E+00	1.4564816E-06
31	2.2785588E+01	1.0493418E+00	1.0519270E-06
32	2.2785606E+01	1.0493419E+00	7.7598869E-07
ITEX	rrn	rkn	ek
32	22.78560612320396	1.049341875866213	7.759886924141313E-07

FACTOR DE MULTIPLICACION: 1.049341875866213

POTENCIA PROMEDIADA PARA CADA PLANO XY

```

MIN:  1      0.000
      2      0.102
      3      0.262
      4      0.461
      5      0.736
      6      1.129
      7      1.633
MAX:  8      1.906
      9      1.817
     10      1.351
     11      0.603
     12      0.000

```

```

      17 9
arreglo de ensambles
17 a lo largo del eje x
9 a lo largo del eje y
Arreglo ncpe

```

```

57 -1 58 -1 59 -1 60 -1 61 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1
-1 52 -1 53 -1 54 -1 55 -1 56 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1
46 -1 47 -1 48 -1 49 -1 50 -1 51 -1 -1 -1 -1 -1 -1
-1 40 -1 41 -1 42 -1 43 -1 44 -1 45 -1 -1 -1 -1 -1
33 -1 34 -1 35 -1 36 -1 37 -1 38 -1 39 -1 -1 -1 -1
-1 26 -1 27 -1 28 -1 29 -1 30 -1 31 -1 32 -1 -1 -1
18 -1 19 -1 20 -1 21 -1 22 -1 23 -1 24 -1 25 -1 -1
-1 10 -1 11 -1 12 -1 13 -1 14 -1 15 -1 16 -1 17 -1
1 -1 2 -1 3 -1 4 -1 5 -1 6 -1 7 -1 8 -1 9

```

```

Distribucion Radial de Potencia
Por Ensamble al tiempo t=0 segs.
**** PWPE ****

```

```

POTENCIA PROMEDIADA PARA CADA PLANO XY
*****

```

```

          0.000  0.848  1.876  2.349  1.837  1.514  1.134  0.767
0.502  0.381  0.161  0.000
          0.000  0.623  1.376  1.774  1.713  1.440  1.063  0.711
0.454  0.279  0.114  0.000
          0.000  0.637  1.414  1.878  1.938  1.638  1.154  0.743
0.463  0.266  0.105  0.000
          0.000  0.620  1.372  1.810  1.849  1.566  1.124  0.733
0.460  0.267  0.106  0.000
          0.000  0.842  1.882  2.528  2.650  2.207  1.395  0.860
0.533  0.301  0.117  0.000
          0.000  0.671  1.496  2.004  2.093  1.753  1.159  0.725
0.449  0.255  0.100  0.000
          0.000  0.663  1.486  2.008  2.122  1.789  1.157  0.728
0.454  0.256  0.099  0.000

```

	0.000	0.673	1.507	2.032	2.142	1.775	0.930	0.571
0.355	0.200	0.078	0.000					
	0.000	0.831	1.860	2.506	2.636	2.204	1.401	0.867
0.539	0.304	0.118	0.000					
	0.000	0.736	1.661	2.250	2.389	2.082	1.519	1.006
0.632	0.356	0.136	0.000					
	0.000	0.633	1.423	1.926	2.043	1.757	1.219	0.793
0.497	0.280	0.108	0.000					
	0.000	0.629	1.412	1.910	2.022	1.730	1.184	0.763
0.477	0.269	0.104	0.000					
	0.000	0.405	0.913	1.237	1.318	1.165	0.878	0.595
0.375	0.212	0.081	0.000					
	0.000	0.609	1.375	1.862	1.983	1.746	1.306	0.880
0.554	0.313	0.120	0.000					
	0.000	0.666	1.502	2.035	2.166	1.902	1.414	0.949
0.598	0.337	0.129	0.000					
	0.000	0.543	1.223	1.657	1.762	1.547	1.150	0.771
0.486	0.274	0.105	0.000					
	0.000	0.353	0.797	1.079	1.152	1.023	0.779	0.532
0.336	0.190	0.073	0.000					
	0.000	0.436	0.984	1.333	1.423	1.264	0.962	0.657
0.416	0.235	0.090	0.000					
	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.000	0.000	0.000	0.000					

TFINAL: 0.1000000000000000 DELTA T: 1.0000000000000000E-03

>>TIEMPO<< >>POTENCIA<<

0.000000000E+00	1.000000000E+00
2.000000000E-03	9.839745141E-01
3.000000000E-03	9.773441979E-01
4.000000000E-03	9.719935914E-01
5.000000000E-03	9.670345037E-01
6.000000000E-03	9.629795005E-01
7.000000000E-03	9.592847972E-01
8.000000000E-03	9.562250282E-01
9.000000000E-03	9.534735197E-01
1.000000000E-02	9.511687991E-01
1.100000000E-02	9.491178145E-01
1.200000000E-02	9.473839912E-01
1.300000000E-02	9.458536055E-01
1.400000000E-02	9.445495244E-01
1.500000000E-02	9.434074635E-01
1.600000000E-02	9.424256579E-01
1.700000000E-02	9.415727779E-01
1.800000000E-02	9.408319018E-01
1.900000000E-02	9.401929629E-01
2.000000000E-02	9.396337773E-01
2.100000000E-02	9.391555278E-01
2.200000000E-02	9.387292098E-01
2.300000000E-02	9.383708984E-01
2.400000000E-02	9.380456871E-01
2.500000000E-02	9.377763371E-01

2.600000000E-02 9.375267782E-01
2.700000000E-02 9.373234898E-01
2.800000000E-02 9.371298136E-01
2.900000000E-02 9.369752285E-01
3.000000000E-02 9.368246270E-01
3.100000000E-02 9.367091386E-01
3.200000000E-02 9.365888743E-01
3.300000000E-02 9.364997028E-01
3.400000000E-02 9.364030421E-01
3.500000000E-02 9.363339140E-01
3.600000000E-02 9.362556419E-01
3.700000000E-02 9.362014849E-01
3.800000000E-02 9.361364760E-01
3.900000000E-02 9.360929495E-01
4.000000000E-02 9.360394127E-01
4.100000000E-02 9.360034754E-01
4.200000000E-02 9.359550478E-01
4.300000000E-02 9.359252969E-01
4.400000000E-02 9.358823407E-01
4.500000000E-02 9.358572899E-01
4.600000000E-02 9.358191600E-01
4.700000000E-02 9.357973456E-01
4.800000000E-02 9.357630189E-01
4.900000000E-02 9.357437147E-01
5.000000000E-02 9.438594916E-01
5.100000000E-02 9.503544472E-01
5.200000000E-02 9.565575592E-01
5.300000000E-02 9.618639358E-01
5.400000000E-02 9.666450430E-01
5.500000000E-02 9.707277344E-01
5.600000000E-02 9.743647801E-01
5.700000000E-02 9.774926751E-01
5.800000000E-02 9.802546982E-01
5.900000000E-02 9.826466684E-01
6.000000000E-02 9.847426552E-01
6.100000000E-02 9.865692655E-01
6.200000000E-02 9.881588314E-01
6.300000000E-02 9.895537491E-01
6.400000000E-02 9.907588226E-01
6.500000000E-02 9.918238896E-01
6.600000000E-02 9.927366632E-01
6.700000000E-02 9.935502303E-01
6.800000000E-02 9.942413001E-01
6.900000000E-02 9.948638340E-01
7.000000000E-02 9.953861756E-01
7.100000000E-02 9.958622619E-01
7.200000000E-02 9.962562508E-01
7.300000000E-02 9.966215313E-01
7.400000000E-02 9.969184682E-01
7.500000000E-02 9.971989018E-01
7.600000000E-02 9.974218423E-01
7.700000000E-02 9.976377290E-01
7.800000000E-02 9.978045738E-01
7.900000000E-02 9.979714179E-01

8.000000000E-02 9.980921496E-01
8.100000000E-02 9.982216748E-01
8.200000000E-02 9.983130960E-01
8.300000000E-02 9.984140122E-01
8.400000000E-02 9.984817695E-01
8.500000000E-02 9.985608504E-01
8.600000000E-02 9.986106402E-01
8.700000000E-02 9.986730763E-01
8.800000000E-02 9.987087445E-01
8.900000000E-02 9.987583392E-01
9.000000000E-02 9.987836548E-01
9.100000000E-02 9.988233705E-01
9.200000000E-02 9.988409151E-01
9.300000000E-02 9.988732652E-01
9.400000000E-02 9.988845743E-01
9.500000000E-02 9.989111749E-01
9.600000000E-02 9.989177977E-01
9.700000000E-02 9.989394428E-01
9.800000000E-02 9.989432041E-01
9.900000000E-02 9.989610850E-01
1.000000000E-01 9.989624505E-01

NUMERO TOTAL DE ITERACIONES EN TIEMPO: 8787

NUMERO PROMEDIO DE ITS. POR PASO DE TIEMPO: 87

APÉNDICE **C**

SECCIONES EFICACES PARA CADA MATERIAL DEL NÚCLEO DEL REACTOR FBR (KNK-II)


En este Apéndice se proporcionan las secciones eficaces de cada uno de los materiales por los que está compuesto el núcleo del reactor FBR (KNK-II), las cuales fueron tomadas de la referencia [31].


Acero				
Grupo g	Secciones Eficaces			
	Transporte	Absorción	Producción	
1	9.83638e -02	2.16042e -04	0.00000e +00	
2	1.35140e -01	2.06601e -04	0.00000e +00	
3	2.24749e -01	5.56175e -04	0.00000e +00	
4	2.83117e -01	2.40965e -03	0.00000e +00	
Grupo g	Matriz de Dispersión			
	1 \rightarrow g	2 \rightarrow g	3 \rightarrow g	4 \rightarrow g
1	9.06050e -02	0.00000e +00	0.00000e +00	0.00000e +00
2	7.42377e -03	1.30581e -01	0.00000e +00	0.00000e +00
3	1.18183e -04	4.35250e -03	2.19547e -01	0.00000e +00
4	8.25890e -07	3.41675e -07	4.64594e -03	2.80707e -01


Envolvente Axial				
Grupo g	Secciones Eficaces			
	Transporte	Absorción	Producción	
1	1.40462e -01	1.93752e -03	2.96101e -03	
2	2.25534e -01	1.47927e -03	6.56171e -05	
3	3.27065e -01	4.72919e -03	1.14630e -04	
4	3.41224e -01	9.94260e -03	4.93483e -04	
Grupo g	Matriz de Dispersión			
	1 \rightarrow g	2 \rightarrow g	3 \rightarrow g	4 \rightarrow g
1	1.23805e -01	0.00000e +00	0.00000e +00	0.00000e +00
2	1.45483e -02	2.17260e -01	0.00000e +00	0.00000e +00
3	1.70276e -04	6.78885e -03	3.17948e -01	0.00000e +00
4	9.37083e -07	6.04793e -06	4.38782e -03	3.31281e -01


Reflector Axial				
Grupo g	Secciones Eficaces			
	Transporte	Absorción	Producción	
1	1.32933e -01	3.30045e -04	0.00000e +00	
2	1.78531e -01	3.36186e -04	0.00000e +00	
3	2.83151e -01	8.61269e -04	0.00000e +00	
4	4.62167e -01	3.56939e -03	0.00000e +00	
Grupo g	Matriz de Dispersión			
	1 \rightarrow g	2 \rightarrow g	3 \rightarrow g	4 \rightarrow g
1	1.22995e -01	0.00000e +00	0.00000e +00	0.00000e +00
2	9.41231e -03	1.73095e -01	0.00000e +00	0.00000e +00
3	1.93791e -04	5.09881e -03	2.77194e -01	0.00000e +00
4	1.39307e -06	7.05075e -07	5.09601e -03	4.58598e -01


Zona de Prueba				
Grupo g	Secciones Eficaces			
	Transporte	Absorción	Producción	
1	1.24526e -01	7.14117e -03	1.79043e -02	
2	2.01025e -01	8.00576e -03	1.59961e -02	
3	2.86599e -01	1.45876e -02	2.40856e -02	
4	3.68772e -01	4.98120e -02	7.33104e -02	
Grupo g	Matriz de Dispersión			
	1 \rightarrow g	2 \rightarrow g	3 \rightarrow g	4 \rightarrow g
1	1.05964e -01	0.00000e +00	0.00000e +00	0.00000e +00
2	1.12738e -02	1.89370e -01	0.00000e +00	0.00000e +00
3	1.46192e -04	3.64847e -03	2.70207e -01	0.00000e +00
4	9.62178e -07	1.06888e -06	1.80479e -03	3.18960e -01


 Driver sin Moderador				
Grupo g	Secciones Eficaces			
	Transporte	Absorción	Producción	
1	1.40226e -01	7.09892e -03	1.59878e -02	
2	2.28245e -01	9.02877e -03	1.64446e -02	
3	3.25806e -01	1.72478e -02	2.71451e -02	
4	4.18327e -01	5.74211e -02	8.45807e -02	
Grupo g	Matriz de Dispersión			
	$1 \rightarrow g$	$2 \rightarrow g$	$3 \rightarrow g$	$4 \rightarrow g$
1	1.19887e -01	0.00000e +00	0.00000e +00	0.00000e +00
2	1.30790e -02	2.15213e -01	0.00000e +00	0.00000e +00
3	1.59938e -04	4.00117e -03	3.06885e -01	0.00000e +00
4	1.07166e -06	1.82716e -06	1.57341e -03	3.60906e -01

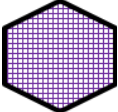
 Driver con Moderador				
Grupo g	Secciones Eficaces			
	Transporte	Absorción	Producción	
1	1.41428e -01	4.67223e -03	1.01663e -02	
2	2.45394e -01	5.57965e -03	9.46359e -03	
3	3.98255e -01	1.32590e -02	1.87325e -02	
4	4.35990e -01	6.51184e -02	8.25335e -02	
Grupo g	Matriz de Dispersión			
	$1 \rightarrow g$	$2 \rightarrow g$	$3 \rightarrow g$	$4 \rightarrow g$
1	1.14337e -01	0.00000e +00	0.00000e +00	0.00000e +00
2	2.09664e -02	2.12006e -01	0.00000e +00	0.00000e +00
3	1.39132e -03	2.67269e -02	3.52093e -01	0.00000e +00
4	6.10281e -05	1.08189e -03	3.29030e -02	3.70872e -01

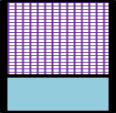
 Reflector sin Moderador				
Grupo g	Secciones Eficaces			
	Transporte	Absorción	Producción	
1	1.59346e -01	4.64814e -04	0.00000e +00	
2	2.16355e -01	4.76496e -04	0.00000e +00	
3	3.48692e -01	1.23810e -03	0.00000e +00	
4	6.24249e -01	4.94333e -03	0.00000e +00	
Grupo g	Matriz de Dispersión			
	$1 \rightarrow g$	$2 \rightarrow g$	$3 \rightarrow g$	$4 \rightarrow g$
1	1.47969e -01	0.00000e +00	0.00000e +00	0.00000e +00
2	1.06607e -02	2.10410e -01	0.00000e +00	0.00000e +00
3	2.49956e -04	5.46711e -03	3.42085e -01	0.00000e +00
4	1.82565e -06	1.00157e -06	5.36879e -03	6.19306e -01

 Reflector con Moderador				
Grupo g	Secciones Eficaces			
	Transporte	Absorción	Producción	
1	1.39164e -01	3.97516e -04	0.00000e +00	
2	2.46993e -01	3.02674e -04	0.00000e +00	
3	4.52425e -01	1.22034e -03	0.00000e +00	
4	5.36256e -01	2.41527e -02	0.00000e +00	
Grupo g	Matriz de Dispersión			
	$1 \rightarrow g$	$2 \rightarrow g$	$3 \rightarrow g$	$4 \rightarrow g$
1	1.05911e -01	0.00000e +00	0.00000e +00	0.00000e +00
2	2.96485e -02	1.84820e -01	0.00000e +00	0.00000e +00
3	3.06502e -03	5.91780e -02	3.73072e -01	0.00000e +00
4	1.41697e -04	2.69229e -03	7.81326e -02	5.12103e -01

	Reflector KNK-1			
Grupo <i>g</i>	Secciones Eficaces			
	Transporte	Absorción	Producción	
1	1.51644e -01	4.58692e -04	0.00000e +00	
2	1.42382e -01	4.59443e -04	0.00000e +00	
3	1.65132e -01	1.07883e -03	0.00000e +00	
4	8.04845e -01	5.91325e -03	0.00000e +00	
Grupo <i>g</i>	Matriz de Dispersión			
	1 → <i>g</i>	2 → <i>g</i>	3 → <i>g</i>	4 → <i>g</i>
1	1.38427e -01	0.00000e +00	0.00000e +00	0.00000e +00
2	1.23901e -02	1.37502e -01	0.00000e +00	0.00000e +00
3	3.66930e -04	4.41927e -03	1.60722e -01	0.00000e +00
4	1.69036e -06	1.63280e -06	3.33075e -03	7.98932e -01

	Sodio / Acero			
Grupo <i>g</i>	Secciones Eficaces			
	Transporte	Absorción	Producción	
1	9.65097e -02	2.25039e -04	0.00000e +00	
2	9.87095e -02	2.33696e -04	0.00000e +00	
3	1.34200e -01	5.39303e -04	0.00000e +00	
4	4.12670e -01	3.03759e -03	0.00000e +00	
Grupo	Matriz de Dispersión			
	1 → <i>g</i>	2 → <i>g</i>	3 → <i>g</i>	4 → <i>g</i>
1	883550e -02	0.00000e +00	0.00000e +00	0.00000e +00
2	7.73409e -03	9.52493e -02	0.00000e +00	0.00000e +00
3	1.94719e -04	3.22568e -03	1.30756e -01	0.00000e +00
4	8.89615e -07	7.98494e -07	2.90481e -03	4.09632e -01

	Barra de Control			
Grupo g	Secciones Eficaces			
	Transporte	Absorción	Producción	
1	1.39085e -01	8.62218e -03	0.00000e +00	
2	2.28152e -01	2.91302e -02	0.00000e +00	
3	3.18806e -01	7.40851e -02	0.00000e +00	
4	6.27366e -01	3.12550e -01	0.00000e +00	
Grupo g	Matriz de Dispersión			
	1 \rightarrow g	2 \rightarrow g	3 \rightarrow g	4 \rightarrow g
1	1.17722e -01	0.00000e +00	0.00000e +00	0.00000e +00
2	1.26066e -02	1.94699e -01	0.00000e +00	0.00000e +00
3	1.33314e -04	4.32219e -03	2.44352e -01	0.00000e +00
4	1.08839e -06	1.85491e -07	3.68781e -04	3.14816e -01

	Barra de Control con Sodio			
Grupo g	Secciones Eficaces			
	Transporte	Absorción	Producción	
1	7.27587e -02	9.06964e -05	0.00000e +00	
2	1.00218e -01	8.04746e -05	0.00000e +00	
3	1.60703e -01	1.96101e -04	0.00000e +00	
4	1.51576e -01	1.20796e -03	0.00000e +00	
Grupo g	Matriz de Dispersión			
	1 \rightarrow g	2 \rightarrow g	3 \rightarrow g	4 \rightarrow g
1	6.63634e -02	0.00000e +00	0.00000e +00	0.00000e +00
2	6.23393e -03	9.61236e -02	0.00000e +00	0.00000e +00
3	7.02121e -05	4.0137e -03	1.56016e -01	0.00000e +00
4	4.16388e -07	1.26939e -07	4.49111e -03	1.50368e -01

Para todos los materiales			
Grupo g	Rango de Energía (eV)		χ_g
	Superior	Inferior	
1	1.05000e +07	4.00000e +05	0.908564
2	4.00000e +05	4.64159e +04	0.087307
3	4.64159e +04	2.15443e +03	0.004129
4	2.15443e +03	Térmico	0.000000