



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
ESCUELA SUPERIOR DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

**IMPLEMENTACIÓN DE LA CINÉTICA EN EL
CÓDIGO DE TRANSPORTE TRIDIMENSIONAL
AZTRAN**

T E S I S

**PRESENTADA ANTE EL COLEGIO DE PROFESORES DE LA
SECCIÓN DE GRADUADOS DE LA ESCUELA SUPERIOR DE
FÍSICA Y MATEMÁTICAS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO
NACIONAL PARA SATISFACER, EN PARTE, LOS REQUISITOS
NECESARIOS PARA OBTENER EL GRADO DE**

**MAESTRÍA EN CIENCIAS
FISICOMATEMÁTICAS**

(LÍNEA DE INVESTIGACIÓN DE INGENIERÍA NUCLEAR)

POR

JULIAN ARTURO DURAN GONZALEZ

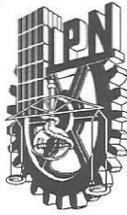
DIRIGIDA POR:

Dr. ARMANDO MIGUEL GÓMEZ TORRES (ININ)

Dr. EDMUNDO DEL VALLE GALLEGOS (IPN)

MÉXICO, CDMX., DICIEMBRE 2016





INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL SECRETARIA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

ACTA DE REGISTRO DE TEMA DE TESIS Y DESIGNACIÓN DE DIRECTORES DE TESIS

Ciudad de México, a 10 de Octubre del 2016

El Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de ESFM en su sesión Ordinaria No. 18 celebrada el día 28 del mes de Noviembre 2014 conoció la solicitud presentada por el(la) alumno(a):

Duran

Apellido paterno

Gonzalez

Apellido materno

Julian Arturo

Nombre (s)

Con registro:

B	1	4	1	2	3	7
---	---	---	---	---	---	---

Aspirante de la: Maestría en Ciencias Fisicomatemáticas

1.- Se designa al aspirante el tema de tesis titulado:

"Implementación de la cinética en el código de transporte tridimensional AZTRAN"

De manera general el tema abarcará los siguientes aspectos:

Se anexa hoja

2.- Se designan como Directores de Tesis a los Profesores:

Dr. Edmundo del Valle Gallegos y Dr. Armando Miguel Gómez Torres

3.- El trabajo de investigación base para el desarrollo de la tesina será elaborado por el alumno en:

El Departamento de Física

que cuenta con los recursos e infraestructura necesarios.

4.- El interesado deberá asistir a los seminarios desarrollados en el área de adscripción del trabajo desde la fecha en que se suscribe la presente hasta la aceptación de la tesis por la Comisión Revisora correspondiente:

Directores de Tesis

Dr. Edmundo del Valle Gallegos

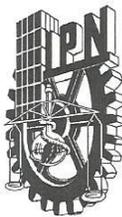
Dr. Armando Miguel Gómez Torres

Aspirante

Presidente del Colegio

Duran Gonzalez Julian Arturo
Dra. Concepción Mejía García

SEP
ESCUELA SUPERIOR DE
FISICA Y MATEMATICAS
SECCION DE ESTUDIOS DE
POSGRADO E INVESTIGACION
IPN



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

ACTA DE REVISIÓN DE TESIS

En la Ciudad de México siendo las 18:00 horas del día 14 del mes de Noviembre del 2016 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de la Tesis, designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de la ESFM para examinar la tesis titulada:

"Implementación de la cinética en el código de transporte tridimensional AZTRAN"

Presentada por el(la) alumno(a):

Duran	Gonzalez	Julian Arturo
Apellido paterno	Apellido materno	Nombre(s)

Con registro:

B	1	4	1	2	3	7
---	---	---	---	---	---	---

aspirante de la :

Maestría en Ciencias Fisicomatemáticas

Después de intercambiar opiniones los miembros de la Comisión manifestaron **APROBAR LA TESIS**, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

LA COMISIÓN REVISORA

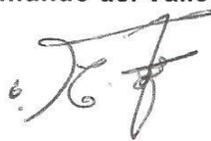
Directores de tesis



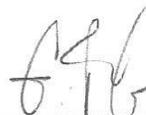
Dr. Edmundo del Valle Gallegos



Dr. Armando Miguel Gómez Torres



M. en C. Carlos Filio López



Dr. Jesús García Ravelo

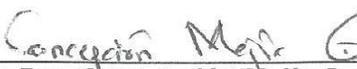


Dr. Arturo Fidencio Méndez Sánchez

PRESIDENTE DEL COLEGIO DE PROFESORES



SEP
ESCUELA SUPERIOR DE
FISICA Y MATEMATICAS
SECCION DE ESTUDIOS DE
POSGRADO E INVESTIGACIÓN
IPN



Dra. Concepción Mejía García



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

CARTA CESIÓN DE DERECHOS

En la Ciudad de México, D.F. el día 1 del mes de diciembre del año 2016, el que suscribe Julian Arturo Duran Gonzalez alumno del Programa de Maestría en Ciencias Fisicomatemáticas, con número de registro B141237, adscrito a la Escuela Superior de Física y Matemáticas, manifiesto que es el autor intelectual del presente trabajo de Tesis bajo la dirección del Dr. Armando Miguel Gómez Torres y el Dr. Edmundo del Valle Gallegos y cede los derechos del trabajo titulado IMPLEMENTACIÓN DE LA CINÉTICA EN EL CÓDIGO DE TRANSPORTE TRIDIMENSIONAL AZTRAN, al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin el permiso expreso del autor y/o directores del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a las siguientes direcciones: jdurang0900@alumno.ipn.mx, armando.gomez@inin.gob.mx o evalle@ipn.mx. Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.

Julian Arturo Duran Gonzalez

Resumen

En este trabajo se resuelve numéricamente la ecuación de transporte de neutrones dependiente del tiempo en geometría XYZ, para varios grupos de energía, usando el método de ordenadas discretas S_n para la discretización de la variable angular, el método nodal RTN-0 para la discretización espacial y el método θ para la discretización en tiempo.

Para lograr esto, se partió del código AZTRAN que forma parte de la AZTLAN Platform, nombre con el que se le ha sido designado al proyecto No. 212602, Plataforma Mexicana para el Análisis y Diseño de Reactores Nucleares, financiado por el fondo sectorial CONACYT-SENER-SUSTENTABILIDAD ENERGÉTICA.

En un principio, el código AZTRAN sólo resolvía la ecuación de transporte de neutrones en estado estacionario, por lo que se le implementó la parte temporal. Esto se realizó integrando la ecuación de transporte de neutrones respecto al tiempo y las ecuaciones de balance correspondientes a las concentraciones de precursores de neutrones retardados, para lo cual se aplicó el método θ . Después de haber implementado directamente la cinética a AZTRAN y de haber comprobado su capacidad para simular varios problemas de prueba, se implementó el método cuasi-estático mejorado, que es una herramienta para reducir el tiempo de cómputo donde el flujo angular es factorizado por el producto de dos funciones llamadas función de forma y función de amplitud, donde la primera se calcula para pasos de tiempo largos, denominados macro-pasos y la segunda es resuelta para pasos de tiempo pequeños, denominados micro-pasos.

La nueva versión de AZTRAN está escrita en FORTRAN 95 y con ésta se simularon varios problemas Benchmark que se tomaron de la literatura. Los problemas de prueba empleados son de una, dos y tres dimensiones lo cual permitió corroborar la precisión y estabilidad del código AZTRAN, mostrando en general, en todas las pruebas de referencia, un buen comportamiento.

Abstract

In this research, the time dependent neutron transport equation is solved numerically in XYZ geometry for several energy groups using the discrete ordinates method S_n for the discretization of the angular variable, the nodal method RTN-0 for the spatial discretization, and the θ method for the discretization in time.

To accomplish this, the starting point was the AZTRAN code, which is part of the AZTLAN platform, the project has been assigned with the number 212602, Plataforma Mexicana para el Análisis y Diseño de Reactores Nucleares, financed by the CONACYT-SENER-SUSTENTABILIDAD ENERGÉTICA funds.

At first, the AZTRAN code only solved the neutron transport equation in stationary state, for which the temporal part was implemented. This was accomplished by integrating the time dependent neutron transport equation and the corresponding balance equations for the concentration of delayed neutron precursors, for which the θ method was applied. After directly implementing the kinetic to AZTRAN and being sure regarding its capacity to simulate several test problems, an improved quasi-static methodology was implemented, which is a technique to reduce the computing time where the angular flux is factorized by the product of two functions called shape and amplitude, where the shape function is used for long time lapses, named macro-steps, and the amplitude function for short time lapses, named micro-steps.

The new AZTRAN version is written in FORTRAN 95 and several benchmark problems were simulated and taken from literature. The engaged benchmark problems were of one, two, and three dimensions which allowed to corroborate the precision and stability of the AZTRAN code, proving in general, in all tests of reference, a good behavior.

Contenido

Resumen	i
Abstract	iii
Contenido	v
Introducción.....	1
1 La Ecuación de Transporte de Neutrones Dependiente del Tiempo.....	3
1.1 Introducción	5
1.2 Definiciones	5
1.3 Condición de balance.....	11
1.4 Condiciones iniciales	17
1.5 Condición de frontera de vacío o de flujo entrante cero.....	18
1.6 Condición de frontera de reflexión o de corriente cero	19
1.7 Condición de continuidad	20
1.8 Ecuación de transporte adjunta	21
2 La Ecuación de Transporte de Neutrones Dependiente del Tiempo en Multigrupos	25
2.1 Introducción	27
2.2 La ecuación de transporte dependiente del tiempo con precursores de neutrones retardados en multigrupos.....	27
2.3 Condiciones iniciales	29
2.4 Condición de frontera de vacío para multigrupos	30
2.5 Condición de frontera de corriente cero para multigrupos	30
2.6 Condición de continuidad para multigrupos	31
2.7 Ecuación de transporte adjunta en multigrupos	31
2.8 Ecuación de transporte en multigrupos en geometría XYZ.....	32
3 Método de Ordenadas Discretas	35
3.1 Introducción	37
3.2 Aproximación S_n en geometría XYZ.....	37
3.3 Discretización angular	38
3.4 Condiciones iniciales	41
3.5 Condición de frontera de vacío	41
3.6 Condición de frontera de corriente cero	42
3.7 Condición de continuidad	43
4 Discretización Espacial Usando el Método Nodal RTN-0.....	45
4.1 Introducción	47
4.2 Métodos nodales.....	47
4.3 Método Nodal RTN-0.....	49
4.4 Aplicación del método nodal RTN-0.....	51
5 Discretización en Tiempo Usando el Método θ de Integración.....	55
5.1 Introducción	57
5.2 Método θ de integración	57

Contenido

5.3	Integración en tiempo de las ecuaciones cinéticas de transporte	58
5.4	Integración de la dependencia en tiempo en el código AZTRAN	61
6	Descripción de la Aproximación Cuasi-estática Mejorada	65
6.1	Introducción	67
6.2	Metodología de la aproximación cuasi-estática mejorada.....	68
6.3	Algoritmo de la aproximación cuasi-estática mejorada.....	77
7	Descripción del Código AZTRAN	81
7.1	Introducción	83
7.2	Algoritmo de solución	83
7.3	Descripción de las subrutinas del código AZTRAN	89
7.4	Descripción de las funciones.....	91
7.5	Descripción de los datos de entrada cinéticos.....	91
8	Descripción y Simulación de los Problemas de Referencia	97
8.1	Introducción	99
8.2	Descripción del problema 0D: caso estático y dependiente del tiempo	100
8.3	Descripción de los problemas 1D: caso estático y dependiente del Tiempo	102
8.3.1	Descripción del problema benchmark 16-A1	106
8.3.2	Solución al benchmark 16-A1	106
8.3.3	Resultados obtenidos para el problema 16-A1	107
8.3.4	Descripción del problema benchmark 16-A2.....	108
8.3.5	Solución al benchmark 16-A2	109
8.3.6	Resultados obtenidos para el problema 16-A2.....	109
8.3.7	Descripción del problema benchmark 16-A3.....	111
8.3.8	Solución al benchmark 16-A3	112
8.3.9	Resultados obtenidos para el problema 16-A3.....	113
8.4	Descripción de los problemas 2D: caso estático y dependiente del tiempo	115
8.5	Descripción del problema 3D: caso estático y dependiente del tiempo	129
	Conclusiones.....	145
	Trabajo Futuro	147
	Referencias	149
	APÉNDICE A.....	153
	APÉNDICE B.....	157

Lista de Figuras

Figura 1.1 Definición del vector unitario $\hat{\Omega}$.	6
Figura 1.2 Representación gráfica del diferencial de superficie dS , el vector unitario normal a ésta, \hat{e}_s , el vector de posición \vec{r} y la dirección $\hat{\Omega}$ de los neutrones.	10
Figura 1.3 Volumen convexo V con una superficie Γ que lo limita.	11
Figura 1.4 Representación de la condición de frontera de vacío.	18
Figura 1.5 Representación de la condición de frontera de corriente cero.	19
Figura 1.6 Representación de la interfaz Γ_i que separa los medios I y II.	20
Figura 2.1 Discretización del intervalo de energía.	27
Figura 3.1 Direcciones angulares incidente y emergente.	38
Figura 4.1 Representación de una celda en coordenadas rectangulares.	48
Figura 6.1 Representación de los intervalos de tiempo.	77
Figura 6.2 Diagrama de flujo del algoritmo de la aproximación cuasi-estática mejorada.	79
Figura 7.1 Diagrama de flujo del algoritmo de AZTRAN (directo).	85
Figura 7.2 Diagrama de flujo del algoritmo de AZTRAN (IQM).	88
Figura 8.1 Potencia normalizada obtenida para un aumento del 0.1% en las secciones eficaces.	101
Figura 8.2 Potencia normalizada para el problema analítico para diferentes pasos de tiempo.	102
Figura 8.3 Configuración del reactor del problema Benchmark 16A.	103
Figura 8.4 Potencia normalizada para el problema 16-A1 con diferentes códigos.	107
Figura 8.5 Flujo escalar de neutrones, térmico y rápido, al tiempo $t = 1$ s, para el problema 16-A1 con diferentes códigos.	107
Figura 8.6 Potencia normalizada para el problema 16-A2 con diferentes códigos.	110
Figura 8.7 Flujo escalar de neutrones, térmico y rápido, al tiempo $t = 0.003$ s, para el problema 16-A2 con diferentes códigos.	110
Figura 8.8 Potencia normalizada para el problema 16-A3 con diferentes métodos.	113
Figura 8.9 Flujo escalar de neutrones, térmico y rápido, al tiempo $t = 0.0015$ s, para el problema 16-A3 con diferentes métodos.	113
Figura 8.10 Modelo bidimensional del reactor TWIGL-2D.	115
Figura 8.11 Potencia normalizada para el problema TWIGL-2D para una extracción de barra de control en forma de escalón usando AZTRAN la aproximación S_2 .	118
Figura 8.12 Potencia normalizada para el problema TWIGL-2D para una extracción de barra de control en forma de escalón usando AZTRAN la aproximación S_4 .	119

Lista de Figuras

Figura 8.13 Potencia normalizada para el problema TWIGL-2D para una extracción de barra de control en forma de rampa usando AZTRAN la aproximación S_2 .	119
Figura 8.14 Potencia normalizada para el problema TWIGL-2D para una extracción de barra de control en forma de rampa usando AZTRAN la aproximación S_4 .	120
Figura 8.15 Potencia normalizada para el problema TWIGL-2D escalón usando diferentes pasos de tiempo empleando la aproximación S_2 .	123
Figura 8.16 Potencia normalizada para el problema TWIGL-2D escalón usando diferentes pasos de tiempo empleando la aproximación S_4 .	124
Figura 8.17 Potencia normalizada para el problema TWIGL-2D rampa usando diferentes pasos de tiempo empleando la aproximación S_2 .	124
Figura 8.18 Potencia normalizada para el problema TWIGL-2D rampa usando diferentes pasos de tiempo empleando la aproximación S_4 .	125
Figura 8.19 Flujo escalar TWIGL-2D al tiempo $t = 0.0$ s.	126
Figura 8.20 Flujo escalar escalón TWIGL-2D al tiempo $t = 0.1$ s.	127
Figura 8.21 Flujo escalar rampa TWIGL-2D al tiempo $t = 0.1$ s.	127
Figura 8.22 Flujo escalar escalón TWIGL-2D al tiempo $t = 0.5$ s.	128
Figura 8.23 Flujo escalar rampa TWIGL-2D al tiempo $t = 0.5$ s.	128
Figura 8.24 Modelo transversal y radial del reactor TWIGL-3D.	129
Figura 8.25 Potencia normalizada para el problema TWIGL-3D escalón usando AZTRAN la aproximación S_2 .	132
Figura 8.26 Potencia normalizada para el problema TWIGL-3D rampa usando AZTRAN la aproximación S_2 .	132
Figura 8.27 Potencia normalizada para el problema TWIGL-3D escalón empleando diferentes pasos de tiempo empleando la aproximación S_2 .	136
Figura 8.28 Potencia normalizada para el problema TWIGL-3D rampa empleando diferentes pasos de tiempo empleando la aproximación S_2 .	136
Figura 8.29 Flujo neutrónico TWIGL-3D a $t=0.0$ s.	139
Figura 8.30 Flujo neutrónico TWIGL-3D escalón a $t=0.1$ s.	140
Figura 8.31 Flujo neutrónico TWIGL-3D escalón a $t=0.3$ s.	141
Figura 8.32 Flujo neutrónico TWIGL-3D rampa a $t=0.1$ s.	142
Figura 8.33 Flujo neutrónico TWIGL-3D rampa a $t=0.3$	143

Lista de Tablas

Tabla 3.1 Cuadraturas que utiliza AZTRAN.	40
Tabla 8.1 Parámetros para el problema 0D.	100
Tabla 8.2 Tiempos de cómputo para el problema analítico 0D.	101
Tabla 8.3 Tiempos de cómputo problema analítico diferentes pasos de tiempo.	102
Tabla 8.4 Secciones eficaces problema Benchmark 16A (cm^{-1}).	103
Tabla 8.5 Malla espacial unidimensional.	104
Tabla 8.6 Cuadratura angular S_4 para el Benchmark 16.	104
Tabla 8.7 Resultados del factor de multiplicación efectiva en el caso estático unidimensional.	104
Tabla 8.8 Parámetros de los precursores de neutrones retardados.	105
Tabla 8.9 Pasos de tiempo para TIMEX usados para el problema 16-A1.	106
Tabla 8.10 Pasos de tiempo para TDA para el problema 16-A1.	106
Tabla 8.11 Comparación de la potencia normalizada problema 16-A1.	108
Tabla 8.12 Pasos de tiempo para TIMEX usados para el problema 16-A2.	109
Tabla 8.13 Pasos de tiempo para TDA para el problema 16-A2.	109
Tabla 8.14 Pasos de tiempo para TNXT y AZTRAN usados para el problema 16-A2.	109
Tabla 8.15 Comparación de la potencia normalizada problema 16-A2.	111
Tabla 8.16 Secciones eficaces iniciales para dos grupos de energía (cm^{-1}).	112
Tabla 8.17 Pasos de tiempo para TIMEX usados para 16-A3.	112
Tabla 8.18 Pasos de tiempo para TDA para el problema 16-A3.	112
Tabla 8.19 Comparación de la potencia normalizada problema 16-A3.	114
Tabla 8.20 Secciones eficaces iniciales para dos grupos de energía (cm^{-1}).	116
Tabla 8.21 Malla espacial TWIGL-2D.	116
Tabla 8.22 Resultados del factor de multiplicación efectiva en caso estático TWIGL-2D.	116
Tabla 8.23 Resultados del factor de multiplicación efectiva AZTRAN vs TNXY.	117
Tabla 8.24 Datos cinéticos para el problema TWIGL-2D.	118
Tabla 8.25 Comparación de la potencia normalizada TWIGL-2D escalón usando la aproximación S_2 .	120
Tabla 8.26 Comparación de la potencia normalizada TWIGL-2D escalón usando la aproximación S_4 .	121
Tabla 8.27 Comparación de la potencia normalizada TWIGL-2D rampa usando la aproximación S_2 .	121
Tabla 8.28 Comparación de la potencia normalizada TWIGL-2D rampa usando la aproximación S_4 .	121
Tabla 8.29 Tiempos de cómputo problema TWIGL-2D escalón usando la aproximación S_2 .	122
Tabla 8.30 Tiempos de cómputo problema TWIGL-2D escalón usando la aproximación S_4 .	122

Lista de Tablas

Tabla 8.31 Tiempos de cómputo problema TWIGL-2D rampa usando la aproximación S_2 .	122
Tabla 8.32 Tiempos de cómputo problema TWIGL-2D rampa usando la aproximación S_4 .	123
Tabla 8.33 Tiempos de cómputo problema TWIGL-2D escalón S_2 diferentes pasos de tiempo.	125
Tabla 8.34 Tiempos de cómputo problema TWIGL-2D escalón S_4 diferentes pasos de tiempo.	126
Tabla 8.35 Tiempos de cómputo problema TWIGL-2D rampa S_2 diferentes pasos de tiempo.	126
Tabla 8.36 Tiempos de cómputo problema TWIGL-2D rampa S_4 diferentes pasos de tiempo.	126
Tabla 8.37 Datos de las secciones eficaces para el reactor TWIGL-3D (unidades en cm^{-1}).	130
Tabla 8.38 Malla espacial TWIGL-3D.	130
Tabla 8.39 Resultados del factor de multiplicación efectiva en caso estático TWIGL-3D.	130
Tabla 8.40 Datos cinéticos TWIGL-3D.	131
Tabla 8.41 Comparación de la potencia normalizada TWIGL-3D escalón usando la aproximación S_2 .	133
Tabla 8.42 Comparación de la potencia normalizada TWIGL-3D rampa usando la aproximación S_2 .	134
Tabla 8.43 Tiempos de cómputo problema TWIGL-3D escalón usando la aproximación S_2 .	135
Tabla 8.44 Tiempos de cómputo problema TWIGL-3D rampa usando la aproximación S_2 .	135
Tabla 8.45 Tiempos de cómputo problema TWIGL-3D escalón S_2 diferentes pasos de tiempo.	137
Tabla 8.46 Tiempos de cómputo problema TWIGL-3D rampa S_2 diferentes pasos de tiempo.	137

Introducción

El proyecto AZTLAN Platform^[1-3] tiene como objetivo desarrollar una plataforma mexicana para el análisis y diseño de reactores nucleares, modernizando y mejorando los códigos neutrónicos, termo-hidráulicos y termo-mecánicos, desarrollados por expertos mexicanos, en una plataforma integrada, para beneficio de las instituciones nacionales tanto de educación como de investigación y regulación en materia nuclear. La plataforma AZTLAN constituye un esfuerzo por dar un paso significativo rumbo a la autonomía de cálculo y análisis que busca situar a México en el mediano plazo en un nivel internacional competitivo en temas de software para el análisis de reactores nucleares.

Este proyecto es una iniciativa nacional liderada por el Instituto Nacional de Investigaciones Nucleares, que reúne a las principales casas de estudios superiores, entre ellas, el Instituto Politécnico Nacional.

Finalmente, con el objetivo de acortar la brecha existente entre desarrolladores similares a nivel mundial, se hará uso de las últimas tecnologías de súper cómputo para acelerar los tiempos de cálculo.

Es por parte del proyecto AZTLAN que surge la necesidad de implementar mejoras a sus códigos neutrónicos, como es el caso del código AZTRAN el cual resolvía la ecuación de transporte únicamente en estado estacionario, geometría XYZ, y varios grupos de energía, usando la técnica de ordenadas discretas para discretizar las variables angulares y usando el método nodal RTN-0 para discretizar la parte espacial, por lo que, como parte de este trabajo de tesis, se implementó la cinética al código. Cabe mencionar que el código AZTRAN en estado estacionario ha sido probado para diferentes problemas de referencia, obteniendo resultados satisfactorios^[4,5].

En este trabajo la solución numérica de la ecuación de transporte dependiente del tiempo se lleva a cabo en un dominio cartesiano en tres dimensiones, bajo condiciones a la frontera e iniciales dadas. El dominio de interés se descompone en regiones homogéneas relativamente grandes, llamadas celdas. Sobre cada celda, los métodos nodales tratan de capturar el comportamiento del flujo angular en cada ordenada discreta usando los momentos del flujo angular en las caras y dentro de cada celda.

En el Capítulo 1 se presenta detalladamente la ecuación de transporte de neutrones dependiente del tiempo e incluye las ecuaciones correspondientes a las concentraciones de precursores de neutrones retardados, se describen las condiciones iniciales que satisface el

Introducción

flujo angular así como cada una de las concentraciones de precursores y finalmente se especifican las condiciones de frontera y continuidad que debe cumplir el flujo angular.

En el Capítulo 2 se lleva a cabo la discretización de la variable energía, usando el procedimiento estándar conocido como el método de multigrupos y se describen las condiciones iniciales, de frontera y continuidad.

En el Capítulo 3 se discretizan las variables angulares usando el método de ordenadas discretas también conocido como aproximación S_n , especificando las condiciones iniciales, de frontera y continuidad que satisface el flujo angular en geometría XYZ.

El desarrollo del esquema nodal RTN-0 y su aplicación para discretizar la parte espacial en geometría XYZ se muestra en el Capítulo 4.

La implementación de la parte temporal en el código AZTRAN se describe en el Capítulo 5.

En el Capítulo 6 se presenta la metodología de la aproximación cuasi-estática mejorada, explicando el algoritmo que se implementó.

En el Capítulo 7 se hace la descripción del algoritmo de solución utilizado en el código AZTRAN y una breve descripción de las subrutinas que fueron desarrolladas.

Los resultados obtenidos para varios problemas de referencia o de prueba fueron comparados con los reportados en la literatura y se muestran en el Capítulo 8.

Finalmente, se presentan las conclusiones del trabajo realizado.

En el Apéndice A se muestra un listado de un archivo de entrada de AZTRAN y en el B el listado del archivo de salida correspondiente.

Capítulo 1

La Ecuación de Transporte de Neutrones Dependiente del Tiempo

1.1 Introducción

Un problema central en el diseño y análisis de reactores nucleares es la predicción exacta y detallada de la distribución en espacio, energía, ángulo y tiempo de los neutrones en todos los componentes del reactor nuclear puesto que los neutrones son los responsables de la propagación de la reacción en cadena y la liberación de energía a través de la fisión y esto está directamente relacionado con la potencia del reactor. Por lo antes mencionado es importante conocer esta distribución, la cual se obtiene a partir de la solución de la ecuación de transporte de Boltzmann también conocida como la ecuación de transporte de neutrones.

En este capítulo se describe la ecuación de transporte de neutrones dependiente del tiempo a partir de un balance en un volumen convexo arbitrario y se describirán también las condiciones iniciales, de frontera y continuidad que debe cumplir el flujo angular de neutrones, así como las condiciones iniciales y de frontera que deben cumplir las concentraciones de precursores de neutrones retardados.

1.2 Definiciones

Se describen a continuación los principales vectores y magnitudes utilizados en el desarrollo de la ecuación de transporte dependiente del tiempo ^[6-8].

Para determinar la distribución de neutrones en el núcleo de un reactor nuclear se requiere conocer su vector posición \vec{r} , así como su vector velocidad \vec{v} .

El vector velocidad se puede representar en la forma siguiente

$$\vec{v} = \|\vec{v}\| \hat{\Omega} \quad (1.1)$$

donde $\|\vec{v}\|$ es la rapidez del neutrón, que es una magnitud escalar y $\hat{\Omega}$ es un vector unitario en la dirección del movimiento, y además con la misma dirección que \vec{v} .

Por lo anterior $\hat{\Omega}$ queda definido por:

$$\hat{\Omega} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \Omega_x \hat{e}_x + \Omega_y \hat{e}_y + \Omega_z \hat{e}_z \quad (1.2)$$

Capítulo 1

con $\Omega_x = \text{sen}\theta \cos\varphi$, $\Omega_y = \text{sen}\theta \text{sen}\varphi$ y $\Omega_z = \cos\theta$ se obtiene:

$$\hat{\Omega} = \hat{e}_x \text{sen}\theta \cos\varphi + \hat{e}_y \text{sen}\theta \text{sen}\varphi + \hat{e}_z \cos\theta \quad (1.3)$$

donde \hat{e}_x , \hat{e}_y y \hat{e}_z son los vectores unitarios asociados a las direcciones cartesianas.

Si se define el diferencial de ángulo sólido $d\hat{\Omega}$ como el cociente de la superficie de la esfera de radio ρ y el área total de la esfera, entonces:

$$d\hat{\Omega} = \frac{ds}{s} = \frac{(\rho d\theta)(\rho \text{sen}\theta d\varphi)}{4\pi\rho^2} = \frac{\text{sen}\theta d\theta d\varphi}{4\pi} \quad (1.4)$$

que se ilustra en la **Figura 1.1**.

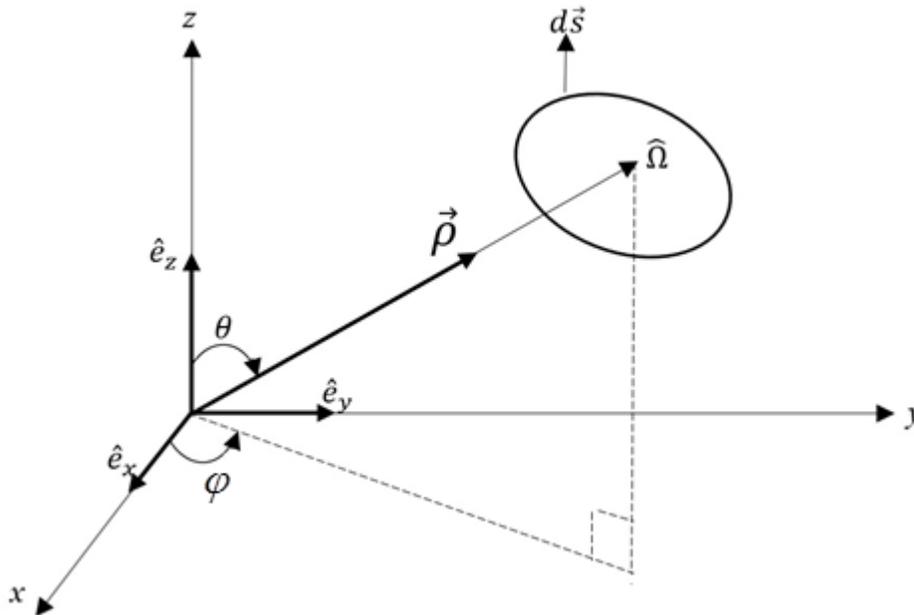


Figura 1.1 Definición del vector unitario $\hat{\Omega}$.

Integrando la ecuación (1.4) sobre todo $\hat{\Omega}$ se tiene:

$$\int_{4\pi} d\hat{\Omega} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \frac{\text{sen}\theta}{4\pi} = 1. \quad (1.5)$$

A continuación se definen algunas cantidades para describir la ecuación de transporte.

Se define la densidad angular neutrónica o distribución de densidad de neutrones como el número esperado de neutrones en el volumen $d\vec{r}$ que se denotará como dV , alrededor de \vec{r} , moviéndose en la dirección $\hat{\Omega}$ en un ángulo sólido $d\hat{\Omega}$, con energías comprendidas entre E y $E+dE$ al tiempo t .

$$n(\vec{r}, \hat{\Omega}, E, t) dV d\hat{\Omega} dE \quad (1.6)$$

Integrando la densidad angular de neutrones sobre todas las direcciones angulares, se obtiene la Densidad Total de Neutrones o Densidad Neutrónica:

$$N(\vec{r}, E, t) = \int_{4\pi} d\hat{\Omega} n(\vec{r}, \hat{\Omega}, E, t) \quad (1.7)$$

la cual define el número de neutrones presentes en el punto \vec{r} , por unidad de volumen y por unidad de energía que se mueven en cualquier dirección y tienen energía E al tiempo t .

Se introduce ahora la sección microscópica total $\sigma_t(\vec{r}, E, t)$ que describe la probabilidad de interacción por unidad de área entre un neutrón y un átomo y a partir de ésta se puede definir la sección eficaz macroscópica total $\Sigma_t(\vec{r}, E, t)$ que describe la probabilidad de interacción por unidad de longitud recorrida por el neutrón en el medio y que se expresa como:

$$\Sigma_t(\vec{r}, E, t) = \rho_{atom}(\vec{r}, E, t) \sigma_t(\vec{r}, E) \quad (1.8)$$

donde $\rho_{atom}(\vec{r}, E, t)$ es la densidad atómica que describe el número de átomos por unidad de volumen de un material.

Dado que la sección eficaz macroscópica total depende de las propiedades del medio, para un medio heterogéneo se tiene:

$$\Sigma_t(\vec{r}, E, t) = \sum_{i=1}^I \rho_{atom_i}(\vec{r}, E, t) \sigma_i(\vec{r}, E, t) \quad (1.9)$$

donde I es el número de especies de núcleos presentes en el medio.

Capítulo 1

La sección eficaz microscópica total se puede descomponer en las secciones de absorción y dispersión de la forma:

$$\sigma_t(\vec{r}, E) = \sigma_a(\vec{r}, E) + \sigma_s(\vec{r}, E) \quad (1.10)$$

tomando en cuenta que se puede hacer también para cada tipo de sección, se considera ahora la sección eficaz macroscópica doble diferencial de dispersión:

$$\Sigma_s(\vec{r}, \hat{\Omega}' \rightarrow \hat{\Omega}, E' \rightarrow E, t) \quad (1.11)$$

esta sección se caracteriza por la dispersión de neutrones con una energía incidente E' y dirección $\hat{\Omega}'$ a una energía E alrededor de dE' y una dirección $\hat{\Omega}$ alrededor de $d\hat{\Omega}'$ donde se obtiene:

$$\Sigma_s(\vec{r}, \hat{\Omega}, E, t) = \int_{4\pi} d\hat{\Omega}' \Sigma_s(\vec{r}, \hat{\Omega}' \rightarrow \hat{\Omega}, E' \rightarrow E, t) \quad (1.12)$$

además:

$$\Sigma_s(\vec{r}, \hat{\Omega}' \rightarrow \hat{\Omega}, E, t) = \int_0^{\infty} dE' \Sigma_s(\vec{r}, \hat{\Omega}' \rightarrow \hat{\Omega}, E' \rightarrow E, t) \quad (1.13)$$

si ahora se aplican las dos expresiones anteriores se obtiene la sección macroscópica de dispersión.

$$\Sigma_s(\vec{r}, \hat{\Omega}, E, t) = \int_{4\pi} d\hat{\Omega}' \int_0^{\infty} dE' \Sigma_s(\vec{r}, \hat{\Omega}' \rightarrow \hat{\Omega}, E' \rightarrow E, t) \quad (1.14)$$

En la sección eficaz macroscópica de dispersión la dirección del neutrón incidente se ignora ya que resulta más conveniente expresar en términos de una dependencia del ángulo al cual el neutrón incidente es dispersado, el llamado ángulo de dispersión θ_o en forma más conveniente el coseno del ángulo:

$$\mu_o = \cos \theta_o \quad (1.15)$$

o en términos de los vectores unitarios:

$$\mu_o = \hat{\Omega}' \cdot \hat{\Omega} \quad (1.16)$$

finalmente se puede expresar:

$$\Sigma_s(\vec{r}, \hat{\Omega}' \rightarrow \hat{\Omega}, E' \rightarrow E, t) = \Sigma_s(\vec{r}, \hat{\Omega}' \cdot \hat{\Omega}, E' \rightarrow E, t) = \Sigma_s(\vec{r}, \mu_o, E' \rightarrow E, t). \quad (1.17)$$

A continuación se define el flujo angular de neutrones como el producto de la densidad angular de neutrones por $v(E)$, que es la velocidad de los neutrones con energía cinética E relativa al sistema de laboratorio:

$$\psi(\vec{r}, \hat{\Omega}, E, t) = v(E) n(\vec{r}, \hat{\Omega}, E, t) \quad (1.18)$$

esta función dice qué cantidad de neutrones por unidad de tiempo atraviesan un área unitaria perpendicular a la dirección $\hat{\Omega}$ de éstos.

A la integral del flujo angular sobre todas las direcciones angulares se le denomina flujo escalar de neutrones que está dado por:

$$\phi(\vec{r}, E, t) = \int_{4\pi} \psi(\vec{r}, \hat{\Omega}, E, t) d\hat{\Omega} = v(E) \int_{4\pi} n(\vec{r}, \hat{\Omega}, E, t) d\hat{\Omega} = v(E) N(\vec{r}, E, t) \quad (1.19)$$

y representa el número total de neutrones provenientes de todo el espacio, que atraviesan una esfera de radio unitario en el punto \vec{r} .

A la rapidez de interacciones totales en un volumen dV de neutrones con energía en dE alrededor de E y velocidad $v(E)$ se le define por

$$F_t(\vec{r}, E, t) dV dE = v(E) \Sigma_t(\vec{r}, E, t) N(\vec{r}, E, t) dV dE. \quad (1.20)$$

Se define ahora la densidad angular de corriente neutrónica dada por:

$$\vec{j}(\vec{r}, \hat{\Omega}, E, t) = v(E) n(\vec{r}, \hat{\Omega}, E, t) \hat{\Omega} = \psi(\vec{r}, \hat{\Omega}, E, t) \hat{\Omega} \quad (1.21)$$

Por lo anterior el número de neutrones esperado a través de un área dS por unidad de tiempo con energía E en dE , dirección $\hat{\Omega}$ en $d\hat{\Omega}$ al tiempo t es:

$$\vec{j}(\vec{r}, \hat{\Omega}, E, t) \cdot \hat{e}_s dS d\hat{\Omega} dE \quad (1.22)$$

donde \hat{e}_s es un vector normal unitario a la superficie dS (Ver **Figura 1.2**).

Capítulo 1

Se define entonces la densidad de corriente neutrónica por

$$\vec{J}(\vec{r}, E, t) = \int_{4\pi} \vec{j}(\vec{r}, \hat{\Omega}, E, t) d\hat{\Omega} \quad (1.23)$$

que es un vector cuya componente normal a dS en \vec{r} representa el número neto de neutrones que atraviesan esta superficie.

O en términos de densidad de la corriente parcial $\vec{J}_{\pm}(\vec{r}, E, t)$:

$$\vec{J}_{\pm}(\vec{r}, t) = \int_0^{\infty} dE \int_{\substack{\hat{\Omega} \cdot \hat{e}_s > 0 \\ \hat{\Omega} \cdot \hat{e}_s < 0}} \vec{j}(\vec{r}, \hat{\Omega}, E, t) d\hat{\Omega} \quad (1.24)$$

definiendo los términos:

$$\vec{J}_{+}(\vec{r}, E, t) = \int_{\hat{e}_s \cdot \hat{\Omega} > 0} \hat{\Omega} \psi(\vec{r}, \hat{\Omega}, E, t) d\hat{\Omega} \quad (1.25)$$

$$\vec{J}_{-}(\vec{r}, E, t) = \int_{\hat{e}_s \cdot \hat{\Omega} < 0} \hat{\Omega} \psi(\vec{r}, \hat{\Omega}, E, t) d\hat{\Omega} \quad (1.26)$$

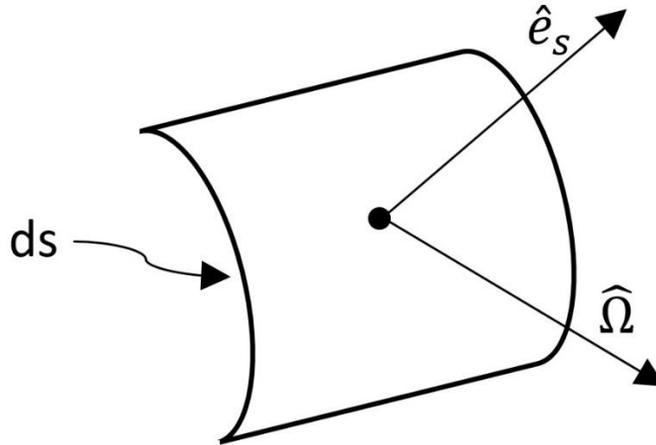


Figura 1.2 Representación gráfica del diferencial de superficie dS , el vector unitario normal a ésta, \hat{e}_s , el vector de posición \vec{r} y la dirección $\hat{\Omega}$ de los neutrones.

1.3 Condición de balance

La ecuación de transporte dependiente del tiempo se obtiene a partir de un balance de neutrones en un volumen arbitrario V (**Figura 1.3**), dado de la siguiente manera ^[9]:

Si el volumen V es no reentrante (convexo), entonces el balance de neutrones en dicho volumen, se escribe como:

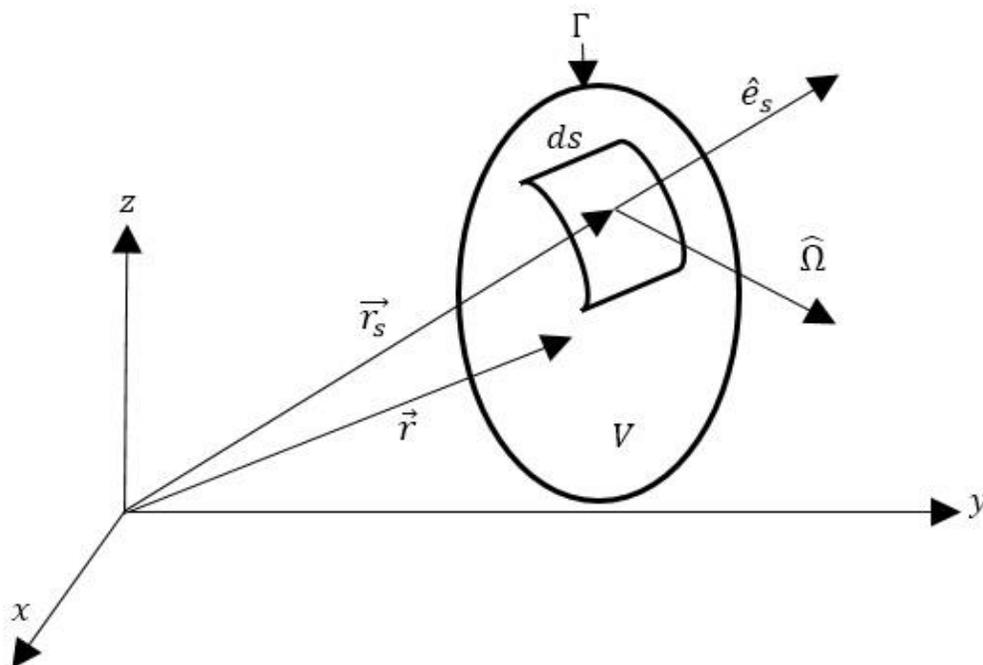


Figura 1.3 Volumen convexo V con una superficie Γ que lo limita.

Variación del número de neutrones respecto al tiempo en V con energía E y dirección $\hat{\Omega}$

= rapidez de ganancias - rapidez de pérdidas.

Capítulo 1

Analizando los términos para la obtención de su respectiva expresión matemática ^[10]:

- GANANCIAS.

Las ganancias en neutrones pueden provenir de cualquiera de los siguientes mecanismos:

- Producción dentro del volumen V debido a fuentes:

Sea $S(\vec{r}, \hat{\Omega}, E, t)$ el número de neutrones producidos en la posición \vec{r} por unidad de volumen, de energía, de ángulo sólido y tiempo, entonces la producción de neutrones por unidad de tiempo en $dVd\hat{\Omega}dE$ es:

$$\int_V S(\vec{r}, \hat{\Omega}, E, t) dVd\hat{\Omega}dE. \quad (1.27)$$

- Dispersiones en el volumen V :

La ganancia de neutrones debido a las dispersiones está dada por aquellos neutrones que al inicio tienen una energía E' y dirección $\hat{\Omega}'$ y al sufrir una o varias colisiones en el volumen cambian a una energía E y dirección $\hat{\Omega}$ de interés.

El número de dispersiones de $\hat{\Omega}' \rightarrow \hat{\Omega}$ y $E' \rightarrow E$ en la posición \vec{r} por unidad de tiempo es:

$$\int_{4\pi} d\hat{\Omega}' \int_0^\infty dE' \int_V dV \Sigma_s(\vec{r}, \hat{\Omega}' \rightarrow \hat{\Omega}, E' \rightarrow E, t) \nu(E) n(\vec{r}, \hat{\Omega}', E', t) d\hat{\Omega} dE. \quad (1.28)$$

- PÉRDIDAS.

Las pérdidas de neutrones en el volumen V pueden ser debidas a cualquiera de los siguientes mecanismos:

- Cualquier interacción implica una pérdida de los neutrones que se encuentran dentro del volumen V , con una energía E alrededor de dE y dirección $\hat{\Omega}$ alrededor de $d\hat{\Omega}$:

$$\left[\int_V \Sigma_t(\vec{r}, E, t) \nu(E) n(\vec{r}, \hat{\Omega}, E, t) dV \right] d\hat{\Omega} dE. \quad (1.29)$$

- Número neto de neutrones por unidad de tiempo que se fugan de V a través de la superficie S del mismo volumen V :

$$\int_S \vec{j}(\vec{r}, \hat{\Omega}, E, t) \cdot \hat{e}_s dS d\hat{\Omega} dE = \int_V \nabla \cdot \vec{j}(\vec{r}, \hat{\Omega}, E, t) dV d\hat{\Omega} dE \quad (1.30)$$

donde se aplica el teorema de la divergencia de Gauss para obtener el lado derecho de la igualdad. Es importante señalar que este término, denominado “de fuga” representa la diferencia entre los neutrones que salen menos los que entran al volumen V .

Así, el número neto de neutrones que se fugan de V a través de S por unidad de tiempo se puede expresar en términos de la densidad angular como:

$$\int_V \nabla \cdot (\hat{\Omega} v(E) n(\vec{r}, \hat{\Omega}, E, t)) dV d\hat{\Omega} dE \quad (1.31)$$

ahora bien, se sabe que en general si \vec{b} es una función vectorial y φ una función escalar, se cumple:

$$\nabla \cdot (\varphi \vec{b}) = (\nabla \varphi) \cdot \vec{b} + \varphi (\nabla \cdot \vec{b}) \quad (1.32)$$

tomando en cuenta que $n(\vec{r}, \hat{\Omega}, E, t)$ es una función escalar y $\hat{\Omega}$ una función vectorial se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\hat{\Omega} v(E) n(\vec{r}, \hat{\Omega}, E, t)) &= v(E) \nabla \cdot (\hat{\Omega} n(\vec{r}, \hat{\Omega}, E, t)) \\ &= v(E) (\nabla n(\vec{r}, \hat{\Omega}, E, t)) \cdot \hat{\Omega} + v(E) n(\vec{r}, \hat{\Omega}, E, t) (\nabla \cdot \hat{\Omega}) \end{aligned} \quad (1.33)$$

como $\hat{\Omega}$ no depende de \vec{r} , entonces $\nabla \cdot \hat{\Omega} = 0$, luego los neutrones que salen menos los que entran a V está dado por

$$\int_V v(E) (\nabla n(\vec{r}, \hat{\Omega}, E, t)) \cdot \hat{\Omega} dV d\hat{\Omega} dE. \quad (1.34)$$

La variación del número de neutrones respecto al tiempo en V con energía E alrededor de dE y dirección $\hat{\Omega}$ alrededor de $d\hat{\Omega}$ se representa como:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\int_V n(\vec{r}, \hat{\Omega}, E, t) dV \right] d\hat{\Omega} dE = \frac{\text{Ganancias}}{\text{unidad de tiempo}} - \frac{\text{Pérdidas}}{\text{unidad de tiempo}} \quad (1.35)$$

por lo que, la ecuación (1.35) queda:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\int_V n(\vec{r}, \hat{\Omega}, E, t) dV \right] d\hat{\Omega} dE &= \left[\int_V S(\vec{r}, \hat{\Omega}, E, t) dV \right] d\hat{\Omega} dE + \\ &\left[\int_V dV \int_{4\pi} d\hat{\Omega}' \int_0^\infty dE' \Sigma_s(\vec{r}, \hat{\Omega}' \rightarrow \hat{\Omega}, E' \rightarrow E, t) v(E) n(\vec{r}, \hat{\Omega}', E', t) \right] d\hat{\Omega} dE - \\ &\left[\int_V \Sigma_t(\vec{r}, E, t) v(E) n(\vec{r}, \hat{\Omega}, E, t) dV \right] d\hat{\Omega} dE - \\ &\left[\int_V \nabla \cdot (\hat{\Omega} v(E) n(\vec{r}, \hat{\Omega}, E, t)) dV \right] d\hat{\Omega} dE \end{aligned} \quad (1.36)$$

como el volumen es arbitrario e independiente del tiempo al integrar en volumen se tiene:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial n(\vec{r}, \hat{\Omega}, E, t)}{\partial t} + \nabla \cdot (v(E) \hat{\Omega} n(\vec{r}, \hat{\Omega}, E, t)) + v(E) \Sigma_t(\vec{r}, E, t) n(\vec{r}, \hat{\Omega}, E, t) \\ &= \int_{4\pi} d\hat{\Omega}' \int_0^\infty dE' v(E) \Sigma_s(\vec{r}, \hat{\Omega}' \rightarrow \hat{\Omega}, E' \rightarrow E, t) n(\vec{r}, \hat{\Omega}', E', t) + S(\vec{r}, \hat{\Omega}, E, t) \end{aligned} \quad (1.37)$$

reescribiendo en términos del flujo angular, se obtiene:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{v(E)} \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, \hat{\Omega}, E, t) + \hat{\Omega} \cdot \nabla \psi(\vec{r}, \hat{\Omega}, E, t) + \Sigma_t(\vec{r}, E, t) \psi(\vec{r}, \hat{\Omega}, E, t) \\ &= \int_{4\pi} d\hat{\Omega}' \int_0^\infty dE' \Sigma_s(\vec{r}, \hat{\Omega}' \rightarrow \hat{\Omega}, E' \rightarrow E, t) \psi(\vec{r}, \hat{\Omega}', E', t) + S(\vec{r}, E, \hat{\Omega}, t). \end{aligned} \quad (1.38)$$

Ahora, queda caracterizar las fuentes de neutrones en el dominio de la ecuación. Estas fuentes se pueden identificar de la siguiente manera:

1. Neutrones producidos por fuentes
2. Neutrones producidos por fisiones.

Para los neutrones producidos por fuentes, se puede definir $Q(\vec{r}, \hat{\Omega}, E, t) dV$ como el número de neutrones producidos en el volumen dV en la posición \vec{r} al tiempo t .

Para los neutrones producidos por fisiones, se define la rapidez a la cual los neutrones de fisión aparecen en $d\hat{\Omega}dE$, la cual representa el número esperado de neutrones de fisión por neutrón, como:

$$\chi(E) d\hat{\Omega} dE \int_{4\pi} \int_0^{\infty} \nu \Sigma_f(\vec{r}, E', t) \psi(\vec{r}, \hat{\Omega}', E', t) dV d\hat{\Omega}' dE' \quad (1.39)$$

donde:

$\Sigma_f(\vec{r}, E', t)$: es la sección eficaz macroscópica de fisión.

ν : número promedio de neutrones producidos por fisión.

$\chi(E)$: espectro de fisión, que es la distribución de energías a las cuales los neutrones que surgen de las fisiones, aparecen dentro del intervalo dE alrededor de E que satisface $\int_0^{\infty} \chi(E) dE = 1$.

Hasta aquí se ha supuesto que todos los neutrones a partir de una fisión, son emitidos de forma inmediata. En realidad, una fracción de ellos se emite en forma retardada.

Estos neutrones retardados son emitidos por algunos productos de fisión que son radioactivos y que al decaer emiten neutrones, estos productos de fisión son llamados precursores de neutrones retardados.

Sea β la fracción total de neutrones retardados, entonces:

$$(1 - \beta) \chi_p(E) \int_{4\pi} d\hat{\Omega}' \int_0^{\infty} dE' \nu \Sigma_f(\vec{r}, E', t) \psi(\vec{r}, \hat{\Omega}', E', t) \quad (1.40)$$

es el número de neutrones inmediatos producidos en la fisión por unidad de tiempo donde $\chi_p(E)$ es el espectro de fisión para los neutrones inmediatos.

Ahora bien, si se consideran I grupos de precursores de neutrones retardados (en función de la vida media de su precursor), se tiene que, el número total de neutrones retardados producidos por fisión y por unidad de tiempo está dada por:

$$\chi_d(E) \sum_{i=1}^I \lambda_i C_i(\vec{r}, t) \quad (1.41)$$

donde C_i representa la concentración de precursores del i -ésimo grupo de precursores de neutrones retardados, λ_i es la constante de decaimiento asociada a C_i y $\chi_d(E)$ es el espectro de fisión para los neutrones retardados.

La concentración de precursores de neutrones retardados se obtiene a partir del flujo de neutrones $\psi(\vec{r}, \hat{\Omega}, E, t)$; La variación de la concentración de precursores respecto al tiempo está dada por la fracción de precursores de neutrones retardados producidos menos la fracción de precursores que decaen, para cada grupo.

$$\frac{\partial}{\partial t} C_i(\vec{r}, t) = \frac{\text{Ganancias}}{\text{unidad de tiempo}} - \frac{\text{Pérdidas}}{\text{unidad de tiempo}} \quad (1.42)$$

donde:

$$\frac{\text{Ganancias}}{\text{unidad de tiempo}} = \beta_i \int_{4\pi} d\hat{\Omega}' \int_0^\infty dE' \nu \Sigma_f(\vec{r}, E', t) \psi(\vec{r}, \hat{\Omega}', E', t)$$

$$\frac{\text{Pérdidas}}{\text{unidad de tiempo}} = \lambda_i C_i(\vec{r}, t).$$

Lo cual implica que la ecuación de transporte se convierte en el siguiente sistema de $I+1$ ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{1}{v(E)} \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, \hat{\Omega}, E, t) + \hat{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \psi(\vec{r}, \hat{\Omega}, E, t) + \Sigma_t(\vec{r}, E, t) \psi(\vec{r}, \hat{\Omega}, E, t) = \\ \int_{4\pi} d\hat{\Omega}' \int_0^\infty dE' \Sigma_s(\vec{r}, \hat{\Omega}' \rightarrow \hat{\Omega}, E' \rightarrow E, t) \psi(\vec{r}, \hat{\Omega}', E', t) + \\ (1 - \beta) \chi_p(E) \int_{4\pi} d\hat{\Omega}' \int_0^\infty dE' \nu \Sigma_f(\vec{r}, E', t) \psi(\vec{r}, \hat{\Omega}', E', t) + \\ \chi_d(E) \sum_{i=1}^I \lambda_i C_i(\vec{r}, t) + Q(\vec{r}, \hat{\Omega}, E, t) \end{aligned} \quad (1.43)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} C_i(\vec{r}, t) = \beta_i \int_{4\pi} d\hat{\Omega}' \int_0^{\infty} dE' \nu \Sigma_f(\vec{r}, E', t) \psi(\vec{r}, \hat{\Omega}', E', t) - \lambda_i C_i(\vec{r}, t) \quad (1.44)$$

$i = 1, \dots, I$

1.4 Condiciones iniciales

La presencia de derivadas respecto al tiempo implica que se deben especificar las condiciones iniciales para el flujo angular o escalar.

Así, se puede especificar la condición inicial para el flujo angular de neutrones como:

$$\psi(\vec{r}, \hat{\Omega}, E, 0) = \psi_0(\vec{r}, \hat{\Omega}, E) \quad \forall \vec{r} \in V, E \in [0, \infty) \text{ y } \hat{\Omega} \quad (1.45)$$

igualmente, para la concentración de precursores:

$$C_{i0}(\vec{r}) = C_i(\vec{r}, 0) = \frac{\beta_i}{\lambda_i} \int_{4\pi} d\hat{\Omega}' \int_0^{\infty} dE' \nu \Sigma_f(\vec{r}, E', 0) \psi_0(\vec{r}, \hat{\Omega}', E') \quad i = 1, \dots, I \quad (1.46)$$

donde el flujo angular y las concentraciones iniciales corresponden a la solución problema en estado estacionario dado por:

$$\begin{aligned} & \hat{\Omega} \cdot \nabla \psi_0(\vec{r}, \hat{\Omega}, E) + \Sigma_t(\vec{r}, E, 0) \psi_0(\vec{r}, \hat{\Omega}, E) = \\ & \int_{4\pi} d\hat{\Omega}' \int_0^{\infty} dE' \Sigma_s(\vec{r}, \hat{\Omega}' \rightarrow \hat{\Omega}, E' \rightarrow E, 0) \psi_0(\vec{r}, \hat{\Omega}', E') + \\ & \frac{\chi(E)}{k_{eff}} \int_{4\pi} d\hat{\Omega}' \int_0^{\infty} dE' \nu \Sigma_f(\vec{r}, E', 0) \psi_0(\vec{r}, \hat{\Omega}', E') + Q(\vec{r}, \hat{\Omega}, E, 0) \end{aligned} \quad (1.47)$$

donde las secciones eficaces corresponden al estado estacionario crítico inicial tal que el factor de multiplicación efectivo k_{eff} es idéntico a la unidad, lo cual asegura el balance de neutrones en la ecuación, siendo $k_{eff}^{[11]}$ el factor de multiplicación efectivo que físicamente es el cociente entre la población de los neutrones de fisión en una generación y la generación inmediata anterior.

1.5 Condición de frontera de vacío o de flujo entrante cero

Suponiendo que el dominio espacial para el cual la ecuación de transporte debe ser resuelta es el volumen V , cuya superficie es S , y si \hat{e}_s es un vector unitario normal exterior del medio en \vec{r}_s y dirigido hacia afuera, entonces es necesario conocer la distribución del flujo entrante al volumen V a través de S , o sea,

$$\psi(\vec{r}_s, \hat{\Omega}, E, t) = 0 \quad \hat{\Omega} \cdot \hat{e}_s < 0 \quad (1.48)$$

representado en la **Figura 1.4**.

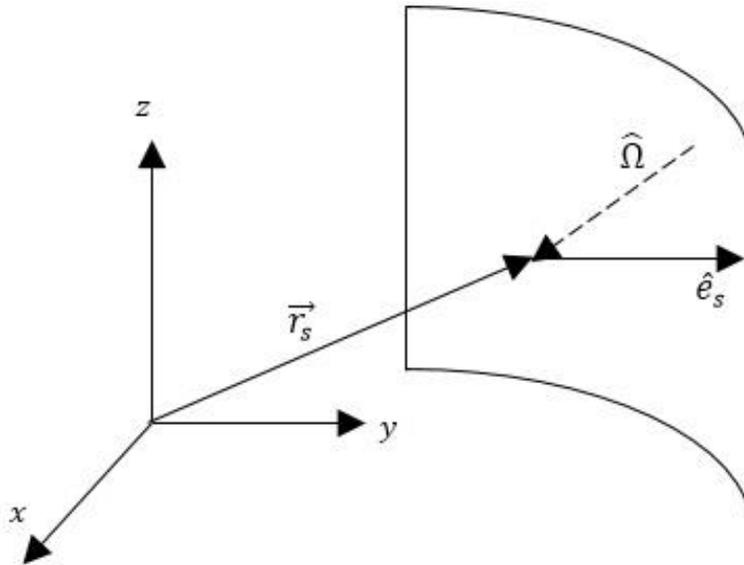


Figura 1.4 Representación de la condición de frontera de vacío.

1.6 Condición de frontera de reflexión o de corriente cero

En una frontera en que la corriente neta es cero la expresión matemática que la representa es

$$\int_{\hat{e}_s \cdot \hat{\Omega} > 0} \hat{\Omega} \psi(\vec{r}_s, \hat{\Omega}, E, t) d\hat{\Omega} + \int_{\hat{e}_s \cdot \hat{\Omega} < 0} \hat{\Omega} \psi(\vec{r}_s, \hat{\Omega}, E, t) d\hat{\Omega} = \vec{0} \quad (1.49)$$

para toda \vec{r}_s en la frontera. Otra forma de expresar esta ecuación es como lo señalan Lewis y Miller [8].

$$\psi(\vec{r}_s, \hat{\Omega}, E, t) = \psi(\vec{r}_s, \hat{\Omega}', E, t) \quad \hat{\Omega} \cdot \hat{e}_s < 0 \quad (1.50)$$

donde \vec{r}_s es un punto sobre la superficie en que se impone la condición de corriente cero y $\hat{\Omega}$ es el ángulo de reflexión que le corresponde al ángulo de incidencia $\hat{\Omega}'$ como se indica en la **Figura 1.5** y cumple las condiciones.

$$\hat{\Omega} \cdot \hat{e}_s = -\hat{e}_s \cdot \hat{\Omega}' \quad \text{y} \quad (\hat{\Omega} \times \hat{\Omega}') \cdot \hat{e}_s = 0 \quad (1.51)$$

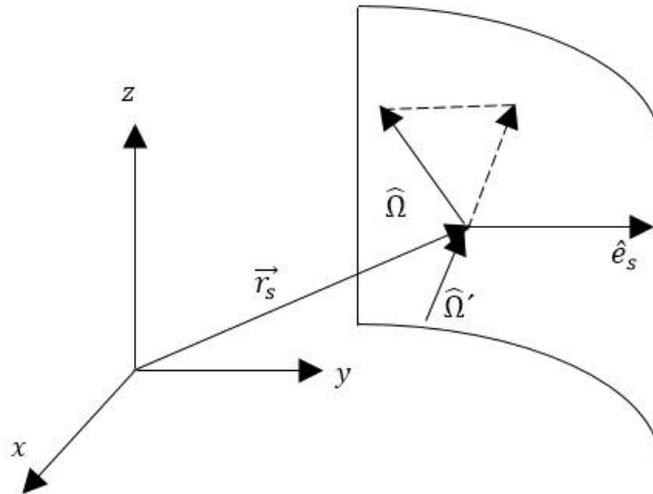


Figura 1.5 Representación de la condición de frontera de corriente cero.

1.7 Condición de continuidad

La solución de la ecuación de transporte de neutrones se aplica en diferentes regiones donde las interfaces separan diferentes materiales y no obstante que en estas regiones las secciones eficaces difieren $\psi(\vec{r}_i, \hat{\Omega}, E, t)$ es continuo, siempre y cuando no existan fuentes en la interfaz.

Esto representa físicamente el hecho de que el flujo angular no cambia al cruzar una interfaz (ver **Figura 1.6**).

$$\psi(\vec{r}_i^-, \hat{\Omega}, E, t) = \psi(\vec{r}_i^+, \hat{\Omega}, E, t) \quad \forall \hat{\Omega}, E \quad (1.52)$$

Cabe hacer mención que los precursores de neutrones retardados no necesariamente cumplen con condiciones de continuidad, debido a la variación de las secciones eficaces de fisión que puede existir de una región a otra, causando discontinuidades en las interfaces.

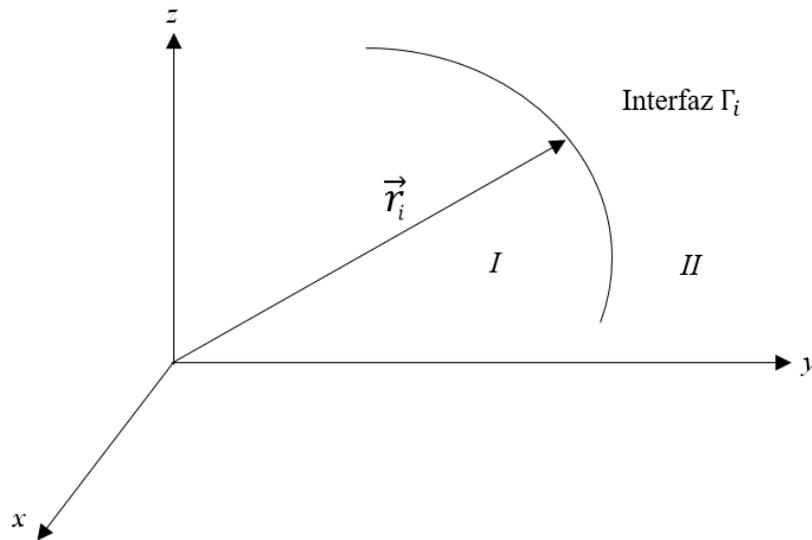


Figura 1.6 Representación de la interfaz Γ_i que separa los medios I y II.

1.8 Ecuación de transporte adjunta

Si se parte de la ecuación de transporte dependiente del tiempo se puede obtener la ecuación de transporte en estado estacionario en un medio multiplicativo sin fuentes externas.

$$\begin{aligned} & \hat{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \psi(\vec{r}, \hat{\Omega}, E) + \Sigma_t(\vec{r}, E) \psi(\vec{r}, \hat{\Omega}, E) = \\ & \int_{4\pi} d\hat{\Omega}' \int_0^\infty dE' \Sigma_s(\vec{r}, \hat{\Omega}' \rightarrow \hat{\Omega}, E' \rightarrow E) \psi(\vec{r}, \hat{\Omega}', E') + \\ & \chi(E) \int_{4\pi} d\hat{\Omega}' \int_0^\infty dE' \nu \Sigma_f(\vec{r}, E') \psi(\vec{r}, \hat{\Omega}', E') \end{aligned} \quad (1.53)$$

Si la ecuación de transporte se reescribe usando los siguientes operadores lineales

$$\begin{aligned} \hat{L}_t &= \hat{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \\ \hat{L}_r &= \Sigma_t(\vec{r}, E) \\ \hat{L}_s &= \int_{4\pi} d\hat{\Omega}' \int_0^\infty dE' \Sigma_s(\vec{r}, \hat{\Omega}' \rightarrow \hat{\Omega}, E' \rightarrow E) \\ \hat{L}_f &= \chi(E) \int_{4\pi} d\hat{\Omega}' \int_0^\infty dE' \nu \Sigma_f(\vec{r}, E') \end{aligned} \quad (1.54a)$$

entonces

$$\hat{L}\psi = (\hat{L}_t + \hat{L}_r - \hat{L}_s - \hat{L}_f)\psi = 0. \quad (1.55b)$$

Definiendo ahora el producto interno $\langle u, w \rangle$ de la siguiente manera

$$\langle u, w \rangle = \int_V \int_{4\pi} \int_0^\infty u(\vec{r}, \hat{\Omega}, E) w(\vec{r}, \hat{\Omega}, E) dV d\hat{\Omega} dE \quad (1.56)$$

el cual tiene las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} \langle u, w \rangle &= \langle w, u \rangle \\ \langle \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, \alpha_3 w \rangle &= \alpha_1 \alpha_3 \langle u_1, w \rangle + \alpha_2 \alpha_3 \langle u_2, w \rangle \end{aligned} \quad (1.57)$$

donde u, w son dos funciones reales y $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ son escalares reales.

Capítulo 1

Ahora bien dado un operador lineal se puede definir la identidad

$$\langle w, \hat{L}u \rangle = \langle u, \hat{L}^\dagger w \rangle \quad (1.58)$$

donde \hat{L}^\dagger es conocido como el operador adjunto correspondiente a \hat{L} .

Haciendo uso de estas propiedades se pueden calcular el adjunto de los operadores lineales de la ecuación de transporte ^[12].

$$\begin{aligned} \hat{L}_l^\dagger &= -\hat{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \\ \hat{L}_r^\dagger &= \Sigma_t(\vec{r}, E) \\ \hat{L}_s^\dagger &= \int_{4\pi} d\hat{\Omega}' \int_0^\infty dE' \Sigma_s(\vec{r}, \hat{\Omega} \rightarrow \hat{\Omega}', E \rightarrow E') \\ \hat{L}_f^\dagger &= \nu \Sigma_f(\vec{r}, E) \int_{4\pi} d\hat{\Omega}' \int_0^\infty dE' \chi(E') \end{aligned} \quad (1.59a)$$

Por lo que la ecuación de transporte adjunta se puede reescribir usando los operadores como

$$\hat{L}^\dagger \psi^\dagger = (\hat{L}_l^\dagger + \hat{L}_r^\dagger - \hat{L}_s^\dagger - \hat{L}_f^\dagger) \psi^\dagger = 0 \quad (1.60b)$$

teniendo el adjunto de los operadores de la ecuación de transporte se obtiene la ecuación de transporte adjunta

$$\begin{aligned} -\hat{\Omega} \cdot \nabla \psi^\dagger(\vec{r}, \hat{\Omega}, E) + \Sigma_t(\vec{r}, E) \psi^\dagger(\vec{r}, \hat{\Omega}, E) = \\ \int_{4\pi} \int_0^\infty \Sigma_s(\vec{r}, \hat{\Omega} \rightarrow \hat{\Omega}', E \rightarrow E') \psi^\dagger(\vec{r}, E', \hat{\Omega}') dE' d\hat{\Omega}' \\ + \nu \Sigma_f(\vec{r}, E) \int_{4\pi} d\hat{\Omega}' \int_0^\infty dE' \chi(E') \psi^\dagger(\vec{r}, \hat{\Omega}', E', t) \end{aligned} \quad (1.61)$$

y las condiciones de frontera de vacío y de reflexión adjuntas están dadas ahora por:

$$\psi(\vec{r}_s, \hat{\Omega}, E, t) = 0 \quad \hat{\Omega} \cdot \hat{e}_s > 0 \quad (1.62)$$

$$\psi(\vec{r}_s, \hat{\Omega}, E, t) = \psi(\vec{r}_s, \hat{\Omega}', E, t) \quad \hat{\Omega} \cdot \hat{e}_s > 0. \quad (1.63)$$

Nótese que en el problema adjunto en la sección doble diferencial de dispersión se intercambiaron los términos de energía y ángulo, mientras que también se intercambió el espectro de fisión con respecto a la sección eficaz de fisión.

El flujo ψ (directo) satisface un modelo matemático bien planteado con suficientes condiciones de frontera disponibles que pueden tomar forma dependiendo de las condiciones que se den, sin embargo el flujo ψ^\dagger (adjunto) es una función de importancia que no tiene un atributo físico pero su importancia radica en que funciona como una función de peso que permitirá obtener varios parámetros cinéticos que se describirán en su oportunidad.

Capítulo 2

La Ecuación de Transporte de Neutrones Dependiente del Tiempo en Multigrupos



2.1 Introducción

En el capítulo anterior se obtuvo la ecuación de transporte dependiente del tiempo con precursores de neutrones retardados pero este conjunto de ecuaciones integro-diferenciales solo puede ser resuelto analíticamente para casos muy especiales, es por eso que para resolver la ecuación de transporte de neutrones dependiente del tiempo con precursores de neutrones retardados es necesario discretizar sus variables involucradas para resolverla numéricamente. En este capítulo se va a discretizar la variable energía para lo cual se llevará a cabo la descomposición del dominio de energía en G intervalos o grupos de energía, promediando las secciones eficaces sobre alguna forma supuesta del flujo dentro de cada grupo ^[4,13-15].

2.2 La ecuación de transporte dependiente del tiempo con precursores de neutrones retardados en multigrupos

Considerando un intervalo de energías $[E_{\min}, E_{\max}]$, en donde se encuentran los neutrones en el dominio y se divide el intervalo en G grupos de energía para los cuales un neutrón dado pertenece al grupo g -ésimo en el caso de que su energía E asociada cumple $E_g < E < E_{g-1}$ donde $g = 1, \dots, G$.

En la **Figura 2.1** se muestra la discretización del intervalo de energía en G subintervalos o grupos.

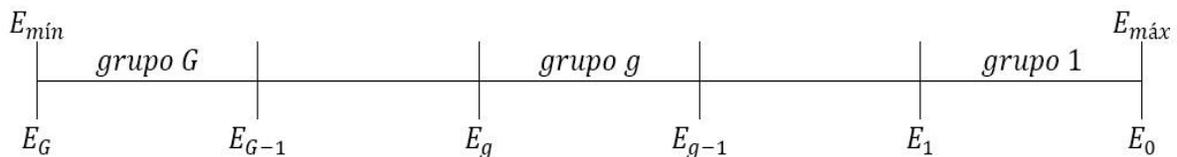


Figura 2.1 Discretización del intervalo de energía.

Capítulo 2

El flujo angular en el g -ésimo grupo de energía está definido por

$$\psi_g(\vec{r}, \hat{\Omega}, t) = \int_{E_g}^{E_{g-1}} \psi(\vec{r}, \hat{\Omega}, E, t) dE \quad (2.1)$$

mientras que la probabilidad χ_g de que un neutrón de fisión aparezca en el grupo g de energía es:

$$\chi_g = \int_{E_g}^{E_{g-1}} \chi(E) dE. \quad (2.2)$$

De la misma manera, para las secciones eficaces correspondientes a cada grupo de energía g se tiene

$$\Sigma_{tg}(\vec{r}, t) \psi_g(\vec{r}, \hat{\Omega}, t) = \int_{E_g}^{E_{g-1}} \Sigma_t(\vec{r}, E, t) \psi(\vec{r}, \hat{\Omega}, E, t) dE \quad (2.3)$$

$$\nu \Sigma_{fg}(\vec{r}, t) \psi_g(\vec{r}, \hat{\Omega}, t) = \int_{E_g}^{E_{g-1}} \nu \Sigma_f(\vec{r}, E, t) \psi(\vec{r}, \hat{\Omega}, E, t) dE \quad (2.4)$$

y

$$\begin{aligned} & \Sigma_{sg' \rightarrow g}(\vec{r}, \hat{\Omega}' \rightarrow \hat{\Omega}, t) \psi_{g'}(\vec{r}, \hat{\Omega}', t) = \\ & \int_{E_g}^{E_{g-1}} dE \int_{E_{g'}}^{E_{g'-1}} \Sigma_s(\vec{r}, \hat{\Omega}' \rightarrow \hat{\Omega}, E' \rightarrow E, t) \psi(\vec{r}, \hat{\Omega}, E, t) dE'. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Finalmente, para el término fuente independiente del flujo.

$$Q_g(\vec{r}, \hat{\Omega}, t) = \int_{E_g}^{E_{g-1}} Q(\vec{r}, \hat{\Omega}, E, t) dE \quad (2.6)$$

Utilizando estas definiciones, una vez que se integran las ecuaciones (1.43) y (1.44) desde E_g hasta E_{g-1} se obtiene las siguientes ecuaciones.

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{v_g} \frac{\partial}{\partial t} \psi_g(\vec{r}, \hat{\Omega}, t) + \hat{\Omega} \cdot \nabla \psi_g(\vec{r}, \hat{\Omega}, t) + \Sigma_{tg}(\vec{r}, t) \psi_g(\vec{r}, \hat{\Omega}, t) = \\
 & \sum_{g'=1}^G \int_{4\pi} \Sigma_{sg' \rightarrow g}(\vec{r}, \hat{\Omega}' \rightarrow \hat{\Omega}, t) \psi_{g'}(\vec{r}, \hat{\Omega}', t) d\hat{\Omega}' \\
 & + (1 - \beta) \chi_{pg} \sum_{g'=1}^G \int_{4\pi} \nu \Sigma_{fg'}(\vec{r}, t) \psi_{g'}(\vec{r}, \hat{\Omega}', t) d\hat{\Omega}' \\
 & + \chi_{dg} \sum_{i=1}^I \lambda_i C_i(\vec{r}, t) + Q_g(\vec{r}, \hat{\Omega}, t); \quad g = 1, \dots, G \tag{2.7}
 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} C_i(\vec{r}, t) = \beta_i \sum_{g'=1}^G \int_{4\pi} \nu \Sigma_{fg'}(\vec{r}, t) \psi_{g'}(\vec{r}, \hat{\Omega}, t) d\hat{\Omega}' - \lambda_i C_i(\vec{r}, t); \quad i = 1, \dots, I \tag{2.8}$$

Como se puede observar, en este sistema de ecuaciones se ha eliminado la dependencia explícita respecto a la energía, teniendo ahora $I + G$ ecuaciones en lugar de $I + 1$ ecuaciones.

2.3 Condiciones iniciales

De manera análoga a como se indicó en la **Sección 1.4** donde se consideró la condición inicial, en este caso una vez que la variable energía ha sido discretizada se procede a definir las condiciones iniciales para el método en multigrupos.

Así, se pueden especificar las condiciones iniciales como:

$$\psi_g(\vec{r}, \hat{\Omega}, 0) = \psi_{g_0}(\vec{r}, \hat{\Omega}); \quad g = 1, \dots, G \tag{2.9}$$

igualmente, para la concentración de precursores:

$$C_{i_0}(\vec{r}) = C_i(\vec{r}, 0) = \frac{\beta_i}{\lambda_i} \sum_{g'=1}^G \nu \Sigma_{fg'}(\vec{r}, 0) \int_{4\pi} d\hat{\Omega}' \psi_{g'_0}(\vec{r}, \hat{\Omega}'); \quad i = 1, \dots, I \tag{2.10}$$

2.4 Condición de frontera de vacío para multigrupos

En el caso de varios grupos de energía, la condición de frontera de vacío se deberá especificar para cada uno de los G grupos de energía considerados, por lo que dichas condiciones quedarán expresadas como sigue:

$$\psi_g(\vec{r}_s, \hat{\Omega}, t) = 0 ; \forall \hat{\Omega}: \hat{\Omega} \cdot \hat{e}_s < 0; g = 1, \dots, G \quad (2.11)$$

donde \hat{e}_s es un vector unitario normal a la superficie exterior del medio en \vec{r}_s y dirigido hacia fuera. (Ver **Figura 1.4**)

2.5 Condición de frontera de corriente cero para multigrupos

La condición de frontera de corriente cero en el caso de multigrupos, estará dada ahora de la siguiente manera:

$$\vec{J}_g(\vec{r}_s, t) = \int_{4\pi} \hat{\Omega} \psi_g(\vec{r}_s, \hat{\Omega}, t) d\hat{\Omega} = \vec{0} ; g = 1, \dots, G; \vec{r}_s \in \Gamma_s \quad (2.12)$$

donde \hat{e}_s es el vector unitario normal a la superficie Γ_s . Esta ecuación también se puede expresar de la siguiente forma para cada grupo de energía g :

$$\int_{4\pi} \hat{\Omega} \psi_g(\vec{r}_s, \hat{\Omega}, t) d\hat{\Omega} = \int_{\hat{e}_s \cdot \hat{\Omega} > 0} \hat{\Omega} \psi_g(\vec{r}_s, \hat{\Omega}, t) d\hat{\Omega} + \int_{\hat{e}_s \cdot \hat{\Omega} < 0} \hat{\Omega} \psi_g(\vec{r}_s, \hat{\Omega}, t) d\hat{\Omega} = \vec{0} \quad (2.13)$$

$$\forall \vec{r}_s \in \Gamma_s$$

que en términos de las corrientes parciales del grupo g quedan.

$$\vec{J}_{g+}(\vec{r}_s, t) + \vec{J}_{g-}(\vec{r}_s, t) = \vec{0} \quad \vec{r}_s \in \Gamma_s \quad (2.14)$$

Esta condición de frontera de corriente cero también se puede expresar como ^[13]:

$$\psi_g(\vec{r}_s, \hat{\Omega}, t) = \psi_g(\vec{r}_s, \hat{\Omega}', t); \quad g = 1.., G; \quad \vec{r}_s \in \Gamma_s; \quad \hat{e}_s \cdot \hat{\Omega} < 0 \quad (2.15)$$

donde \vec{r}_s es un punto sobre la superficie Γ_s en que ésta se impone (Ver **Figura 1.5**).

2.6 Condición de continuidad para multigrupos

Finalmente la condición de continuidad deberá cumplirse para cada uno de los G grupos, las expresiones correspondientes son los siguientes

$$\psi_g(\vec{r}_i^-, \hat{\Omega}, t) = \psi_g(\vec{r}_i^+, \hat{\Omega}, t); \quad g = 1, \dots, G \quad \forall \hat{\Omega} \quad (2.16)$$

donde \vec{r}_i es cualquier punto en la interfaz Γ_i (Ver **Figura 1.6**).

2.7 Ecuación de transporte adjunta en multigrupos

Haciendo analogía como en la ecuación de transporte en estado estacionario se puede aplicar la metodología de multigrupos en la ecuación adjunta que se muestra a continuación

$$\begin{aligned} & -\hat{\Omega} \cdot \nabla \psi_g(\vec{r}, \hat{\Omega}) + \Sigma_{tg}(\vec{r}) \psi_g(\vec{r}, \hat{\Omega}) = \\ & \sum_{g'=1}^G \int_{4\pi} \Sigma_{sg \rightarrow g'}(\vec{r}, \hat{\Omega} \rightarrow \hat{\Omega}') \psi_{g'}(\vec{r}, \hat{\Omega}') d\hat{\Omega}' + \\ & + \nu \Sigma_{fg}(\vec{r}) \sum_{g'=1}^G \int_{4\pi} \chi_{g'} \psi_{g'}(\vec{r}, \hat{\Omega}', t) d\hat{\Omega}'; \quad g = 1, \dots, G \end{aligned} \quad (2.17)$$

donde las condiciones de frontera de vacío y reflexión para el problema adjunto en multigrupos están dados por:

$$\psi_g(\vec{r}_s, \hat{\Omega}, t) = 0 ; \forall \hat{\Omega} : \hat{\Omega} \cdot \hat{e}_s > 0; g = 1, \dots, G \quad (2.18)$$

$$\psi_g(\vec{r}_s, \hat{\Omega}, t) = \psi_g(\vec{r}_s, \hat{\Omega}', t) ; g = 1 \dots, G ; \vec{r}_s \in \Gamma_s ; \hat{e}_s \cdot \hat{\Omega} > 0 \quad (2.19)$$

2.8 Ecuación de transporte en multigrupos en geometría XYZ

Una vez definida la ecuación de transporte de multigrupos a la geometría XYZ se puede definir la dirección angular de la siguiente forma:

$$\hat{\Omega} = \Omega_x \hat{i} + \Omega_y \hat{j} + \Omega_z \hat{k} \quad (2.20)$$

donde:

$$\Omega_x = \text{sen}\theta \cos \varphi \quad (2.21)$$

$$\Omega_y = \text{sen}\theta \text{sen}\varphi \quad (2.22)$$

$$\Omega_z = \cos \theta \quad (2.23)$$

redefiniendo la variable en el eje z como:

$$\xi = \cos \theta \quad (2.24)$$

se pueden escribir las direcciones angulares de la siguiente forma:

$$\mu = \sqrt{1 - \xi^2} \cos \varphi \quad (2.25)$$

$$\eta = \sqrt{1 - \xi^2} \text{sen}\varphi \quad (2.26)$$

sustituyendo las expresiones en la dirección angular se obtiene:

$$\hat{\Omega} = \mu \hat{i} + \eta \hat{j} + \xi \hat{k} \quad (2.27)$$

y por lo tanto, la diferencial del ángulo sólido satisface:

$$\int_{4\pi} d\hat{\Omega} = \int_{-1}^1 \frac{d\theta}{2} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} = 1 \quad (2.28)$$

reemplazando la dirección angular en el primer término de la ecuación de transporte se tiene:

$$\begin{aligned} \hat{\Omega} \cdot \nabla \psi(\vec{r}, \hat{\Omega}, E, t) = & \\ \sqrt{1-\xi^2} \left(\cos \phi \frac{\partial}{\partial x} \psi(x, y, z, \theta, \phi, E, t) \right) + \sqrt{1-\xi^2} \left(\sin \phi \frac{\partial}{\partial y} \psi(x, y, z, \theta, \phi, E, t) \right) & \\ + \sqrt{1-\xi^2} \left(\xi \frac{\partial}{\partial z} \psi(x, y, z, \theta, \phi, E, t) \right) & \end{aligned} \quad (2.29)$$

de tal forma que las ecuaciones de transporte de neutrones dependiente del tiempo en multigrupos y las concentraciones de precursores de neutrones retardados son las siguientes respectivamente:

$$\begin{aligned} \frac{1}{v_g} \frac{\partial}{\partial t} \psi_g(x, y, z, \theta, \phi, t) + \mu \frac{\partial}{\partial x} \psi_g(x, y, z, \theta, \phi, t) + \eta \frac{\partial}{\partial y} \psi_g(x, y, z, \theta, \phi, t) & \\ + \xi \frac{\partial}{\partial z} \psi_g(x, y, z, \theta, \phi, t) + \Sigma_{tg}(x, y, z, t) \psi_g(x, y, z, \theta, \phi, t) = & \\ \left[\sum_{g'=1}^G \Sigma_{sg' \rightarrow g}(x, y, z, t) \right] \int_{-1}^1 \frac{d\theta'}{2} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi'}{2\pi} \psi_g(x, y, z, \theta', \phi', t) & \\ + (1-\beta) \chi_{pg} \sum_{g'=1}^G \int_{-1}^1 \frac{d\theta'}{2} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi'}{2\pi} \nu \Sigma_{fg'}(x, y, z, t) \psi_{g'}(x, y, z, \theta', \phi', t) & \\ + \chi_{dg} \sum_{i=1}^I \lambda_i C_i(x, y, z, t) + Q_g(x, y, z, \theta, \phi, t); \quad g = 1, \dots, G & \end{aligned} \quad (2.30)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} C_i(x, y, z, t) = \beta_i \sum_{g'=1}^G \int_{-1}^1 \frac{d\theta'}{2} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi'}{2\pi} \nu \Sigma_{fg'}(x, y, z, t) \psi_{g'}(x, y, z, \theta', \phi', t) & \\ - \lambda_i C_i(x, y, z, t); \quad i = 1, \dots, I & \end{aligned} \quad (2.31)$$

Capítulo 3

Método de Ordenadas Discretas

3.1 Introducción

Ahora la siguiente variable a discretizar es el ángulo y existen diferentes métodos que permiten obtener una solución aproximada como armónicos esféricos, transformadas de fourier y ordenadas discretas o aproximación S_n .

Para AZTRAN se usó la aproximación S_n , donde la integral en ángulo se aproxima mediante una suma de pesos por funciones evaluadas en diferentes direcciones angulares. Los pesos y direcciones angulares se conocen previamente y existen excelentes fuentes de información al respecto ^[4,13-15].

3.2 Aproximación S_n en geometría XYZ

Ordenadas discretas es un método numérico utilizado para aproximar la ecuación de neutrones a un conjunto discreto de direcciones angulares, en el cual se representa el valor de una función desconocida, en un conjunto de puntos discretos de una variable independiente de la que dependa la función; en este caso se discretiza el ángulo que forma la trayectoria de entrada y la trayectoria de salida de un neutrón sobre el núcleo blanco.

El método consiste en representar por un conjunto de direcciones angulares el dominio de aplicación de la variable de dirección angular en una malla de puntos discretos y después, aproximar la integral en ángulo mediante la suma de un producto de funciones de peso evaluadas en diferentes direcciones de incidencia, multiplicada por la función evaluada en cada punto de la malla. El conjunto de ecuaciones resultantes se le conoce como aproximación S_n .

De esta manera, la aproximación de ordenadas discretas toma en cuenta los siguientes puntos a considerar para su desarrollo:

- Aproximación de las integrales en ángulo.
- Selección apropiada de las direcciones discretas.
- Discretización del flujo angular de neutrones con respecto a los componentes de la dirección $\hat{\Omega}$.

La forma matemática de la aproximación por ordenadas discretas será:

$$\int_{-1}^1 \frac{d\theta}{2} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} \psi(x, y, z, \theta, \phi, E, t) \cong \sum_{n=1}^N \omega_n \psi(x, y, z, \theta_n, \phi_n, E, t) \quad (3.1)$$

donde $n = 1, \dots, N$ indica el número de direcciones angulares discretas θ_n, ϕ_n y cada una de las direcciones angulares se selecciona con sus pesos de cuadratura $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N$ apropiados.

3.3 Discretización angular

Para iniciar con la discretización se aplica el argumento que permite que la sección eficaz macroscópica de dispersión no dependa de la dirección del neutrón incidente sino del cambio en la dirección del neutrón

$$\Sigma_{s_{g' \rightarrow g}}(\vec{r}, \hat{\Omega}' \rightarrow \hat{\Omega}, t) = \Sigma_{s_{g' \rightarrow g}}(\vec{r}, \hat{\Omega}' \cdot \hat{\Omega}, t) = \Sigma_{s_{g' \rightarrow g}}(\vec{r}, \mu_0, t) \quad (3.2)$$

donde $\mu_0 = \cos \theta_0$, esta relación entre los vectores incidente, emergente y el ángulo entre ellos se pueden apreciar en la **Figura 3.1**.

Para continuar con la discretización se necesita retomar las ecuaciones (2.30) y (2.31).

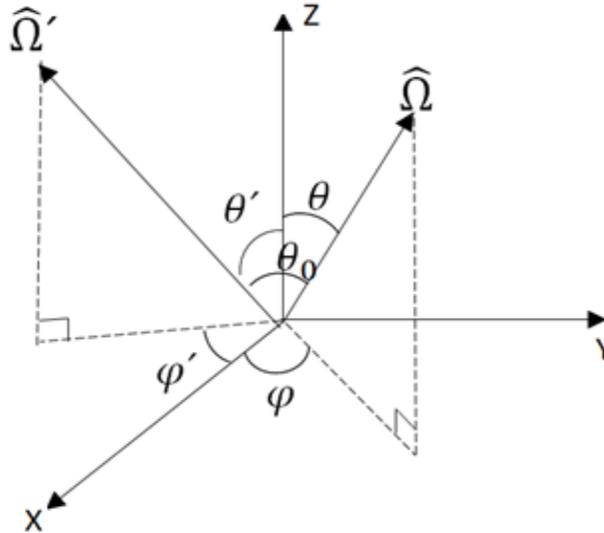


Figura 3.1 Direcciones angulares incidente y emergente.

A continuación las integrales con respecto θ y φ se trabajarán en términos de μ, η, ξ y éstas se pueden aproximar mediante:

$$\int_{4\pi} f(\hat{\Omega})d\hat{\Omega} = \sum_{n=1}^N \omega_n f(\hat{\Omega}_n) \quad (3.3)$$

con $(\omega_n, \hat{\Omega}_n)$ los pesos y direcciones angulares de integración dados por una cuadratura elegida de forma convenientemente siendo $\hat{\Omega}_n = (\mu_n, \eta_n, \xi_n)$.

Para hacer simplificaciones se usa la siguiente notación

$$\psi_{gn}(x, y, z, t) = \psi_g(x, y, z, \mu_n, \eta_n, \xi_n, t) \quad (3.4)$$

y se sustituyen las ecuaciones y si se trata de un medio con dispersión isotrópica se escribe de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \frac{1}{v_g} \frac{\partial}{\partial t} \psi_{gn}(x, y, z, t) + \mu \frac{\partial}{\partial x} \psi_{gn}(x, y, z, t) + \eta \frac{\partial}{\partial y} \psi_{gn}(x, y, z, t) + \xi \frac{\partial}{\partial z} \psi_{gn}(x, y, z, t) + \\ \Sigma_{tg}(x, y, z, t) \psi_{gn}(x, y, z, t) = \sum_{g'=1}^G \sum_{n'=1}^N \omega_{n'} \Sigma_{s_{g' \rightarrow g}}(x, y, z, t) \psi_{gn'}(x, y, z, t) + \\ (1-\beta) \chi_{pg} \sum_{g'=1}^G \sum_{n'=1}^N \omega_{n'} \nu \Sigma_{fg'}(x, y, z, t) \psi_{gn'}(x, y, z, t) \\ + \chi_{dg} \sum_{i=1}^I \lambda_i C_i(x, y, z, t) + Q_{gn}(x, y, z, t) \\ g = 1, \dots, G \\ n = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} C_i(x, y, z, t) = \beta_i \sum_{g'=1}^G \sum_{n'=1}^N \omega_{n'} \nu \Sigma_{fg'}(x, y, z, t) \psi_{gn'}(x, y, z, t) - \lambda_i C_i(x, y, z, t). \\ i = 1, \dots, I \end{aligned} \quad (3.6)$$

La forma de elegir la cuadratura es generalmente para N par, que tenga simetría respecto de $\mu = \eta = \xi = 0$ y que cumpla que el flujo angular sea positivo.

$$\begin{aligned}
 \mu_n, \eta_n, \xi_n, \omega_n &> 0 \\
 \mu_n &= -\mu_{N+1-n} \\
 \eta_n &= -\eta_{N+1-n} \\
 \xi_n &= -\xi_{N+1-n} \\
 \omega_n &= -\omega_{N+1-n} \\
 n &= 1, \dots, \frac{N(N+2)}{8}
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

En la **Tabla 3.1** se muestran valores numéricos para la cuadratura que usa AZTRAN.

Tabla 3.1 Cuadraturas que utiliza AZTRAN.

Cuadratura \mathcal{S}_2				
i	μ_i	η_i	ξ_i	ω_i
1	0.57735027	0.57735027	0.57735027	0.125

Cuadratura \mathcal{S}_4				
i	μ_i	η_i	ξ_i	ω_i
1	0.3500212	0.3500212	0.8688903	0.04166667
2	0.3500212	0.8688903	0.3500212	0.04166667
3	0.8688903	0.3500212	0.3500212	0.04166667

Cuadratura \mathcal{S}_8				
i	μ_i	η_i	ξ_i	ω_i
1	0.1971380	0.1971380	0.9603506	0.0125
2	0.2133981	0.5512958	0.8065570	0.0125
3	0.2133981	0.8065570	0.5512958	0.0125
4	0.1971380	0.9603506	0.1971380	0.0125
5	0.5512958	0.2133981	0.8065570	0.0125
6	0.5773503	0.5773503	0.5773503	0.0125
7	0.5512958	0.8065570	0.2133981	0.0125
8	0.8065570	0.2133981	0.5512958	0.0125
9	0.8065570	0.5512958	0.2133981	0.0125
10	0.9603506	0.1971380	0.1971380	0.0125

3.4 Condiciones iniciales

En el capítulo anterior se describieron las condiciones iniciales para la ecuación de transporte dependiente del tiempo en multigrupos en geometría XYZ. Análogamente se establecen las condiciones aplicando ordenadas discretas, que se tienen en este caso cuando se discretiza la variable angular, para N direcciones angulares.

La existencia de la derivada temporal al aplicar el método de ordenadas discretas a la ecuación de transporte en multigrupos implica que aún se deben proporcionar las condiciones iniciales.

Así, se pueden especificar las condiciones iniciales como:

$$\psi_{gn}(\vec{r}, 0) = \psi_{0gn}(\vec{r}) ; g = 1, \dots, G ; n = 1, \dots, N \quad (3.8)$$

igualmente, para la concentración de precursores:

$$C_{i0}(\vec{r}) = C_i(\vec{r}, 0) = \frac{\beta_i}{\lambda_i} \sum_{g'=1}^G \nu \Sigma_{fg'}(\vec{r}, 0) \sum_{n'=1}^N \omega_{n'} \psi_{0g'n'} ; i = 1, \dots, I \quad (3.9)$$

donde $\psi_{0gn}(\vec{r}) ; g = 1, \dots, G ; n = 1, \dots, N$ es el flujo angular de neutrones correspondiente al estado crítico.

3.5 Condición de frontera de vacío

Para ser más explícitos, se define el dominio $\vec{r} \in [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$.

En ordenadas discretas la condición de frontera de flujo angular cero se expresa, para cada dirección angular $n = 1, \dots, N$ en las caras izquierda, derecha, cercana, lejana, inferior y superior por las ecuaciones (3.10) a (3.15) respectivamente.

$$\psi_g(a, y, z, \mu_n, \eta_n, \xi_n, t) = 0 \quad \begin{array}{l} \text{Si } \mu_n > 0, c \leq y \leq d, e \leq z \leq f \\ g = 1, \dots, G \end{array} \quad (3.10)$$

$$\psi_g(b, y, z, \mu_n, \eta_n, \xi_n, t) = 0 \quad \begin{array}{l} \text{Si } \mu_n < 0, c \leq y \leq d, e \leq z \leq f \\ g = 1, \dots, G \end{array} \quad (3.11)$$

$$\psi_g(x, c, z, \mu_n, \eta_n, \xi_n, t) = 0 \quad \begin{array}{l} \text{Si } \eta_n > 0, a \leq x \leq b, e \leq z \leq f \\ g = 1, \dots, G \end{array} \quad (3.12)$$

$$\psi_g(x, d, z, \mu_n, \eta_n, \xi_n, t) = 0 \quad \begin{array}{l} \text{Si } \eta_n < 0, a \leq x \leq b, e \leq z \leq f \\ g = 1, \dots, G \end{array} \quad (3.13)$$

$$\psi_g(x, y, e, \mu_n, \eta_n, \xi_n, t) = 0 \quad \begin{array}{l} \text{Si } \xi_n > 0, a \leq x \leq b, c \leq y \leq d \\ g = 1, \dots, G \end{array} \quad (3.14)$$

$$\psi_g(x, y, f, \mu_n, \eta_n, \xi_n, t) = 0 \quad \begin{array}{l} \text{Si } \xi_n < 0, a \leq x \leq b, c \leq y \leq d \\ g = 1, \dots, G \end{array} \quad (3.15)$$

3.6 Condición de frontera de corriente cero

A continuación la condición de corriente cero para cada dirección angular $n = 1, \dots, N$, en las caras izquierda, derecha, cercana, lejana, inferior y superior queda expresada por las ecuaciones (3.16) a (3.21) respectivamente.

$$\psi_g(a, y, z, \mu_n, \eta_n, \xi_n, t) = \psi_g(a, y, z, -\mu_n, \eta_n, \xi_n, t) \quad (3.16)$$

$$\begin{array}{l} \text{Si } \mu_n > 0, c \leq y \leq d, e \leq z \leq f \\ g = 1, \dots, G \end{array}$$

$$\psi_g(b, y, z, \mu_n, \eta_n, \xi_n, t) = \psi_g(b, y, z, -\mu_n, \eta_n, \xi_n, t) \quad (3.17)$$

$$\begin{array}{l} \text{Si } \mu_n < 0, c \leq y \leq d, e \leq z \leq f \\ g = 1, \dots, G \end{array}$$

$$\psi_g(x, c, z, \mu_n, \eta_n, \xi_n, t) = \psi_g(x, c, z, \mu_n, -\eta_n, \xi_n, t) \quad (3.18)$$

Si $\eta_n > 0$, $a \leq x \leq b$, $e \leq z \leq f$

$g = 1, \dots, G$

$$\psi_g(x, d, z, \mu_n, \eta_n, \xi_n, t) = \psi_g(x, d, z, \mu_n, -\eta_n, \xi_n, t) \quad (3.19)$$

Si $\eta_n < 0$, $a \leq x \leq b$, $e \leq z \leq f$

$g = 1, \dots, G$

$$\psi_g(x, y, e, \mu_n, \eta_n, \xi_n, t) = \psi_g(x, y, e, \mu_n, \eta_n, -\xi_n, t) \quad (3.20)$$

Si $\xi_n > 0$, $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$

$g = 1, \dots, G$

$$\psi_g(x, y, f, \mu_n, \eta_n, \xi_n, t) = \psi_g(x, y, f, \mu_n, \eta_n, -\xi_n, t) \quad (3.21)$$

Si $\xi_n < 0$, $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$

$g = 1, \dots, G$

3.7 Condición de continuidad

Las condiciones de continuidad para cada dirección angular $n = 1, \dots, N$, que debe de cumplir el flujo angular en las interfaces se describen de manera que el número de neutrones que cruza la frontera de dicho dominio no cambie:

$$\begin{aligned} \psi_{gn}(\vec{r}_i^-, \mu_n, \eta_n, \xi_n, t) &= \psi_{gn}(\vec{r}_i^+, \mu_n, \eta_n, \xi_n, t) \quad \forall \mu_n, \eta_n, \xi_n \\ g &= 1, \dots, G \\ n &= 1, \dots, N \\ \forall \vec{r}_i &\in \Gamma_i \end{aligned} \quad (3.22)$$

donde \vec{r}_i es un punto sobre la interfaz Γ_i .

Capítulo 4

Discretización Espacial

Usando el Método Nodal

RTN-0

4.1 Introducción

La siguiente variable a discretizar es la espacial donde se plantea una partición del problema en regiones uniformes en cuanto a la composición de materiales.

Los primeros códigos que se desarrollaron para resolver numéricamente las ecuaciones de transporte y difusión de neutrones utilizaban el Método de Diferencias Finitas, (MDF), lo cual era útil para problemas sencillos, con el paso de los años se desarrollaron métodos para la solución de problemas más complejos, uno de estos métodos se conocen como Métodos de Elemento Finito (MEF).

En los últimos años se han desarrollado los Métodos de Elementos Nodales (MEN) que comparten características con los métodos antes mencionados. En estos métodos el flujo angular es aproximado por una función continua por partes sobre la celda además de pedir el balance de partículas ^[4,14-17].

4.2 Métodos nodales

Para resolver numéricamente la ecuación de transporte, el dominio espacial sobre el cual va a ser resuelta es usualmente regular y se discretiza mediante un mallado, este dominio se considera como la unión de celdas o nodos sobre las cuales las propiedades físicas pueden ser homogeneizadas.

Los métodos nodales se caracterizan por el hecho de que para una celda, las incógnitas por determinar son el promedio de la función incógnita en cada una de las caras de la celda y el valor promedio de la función en la celda.

La solución debe satisfacer ciertas condiciones de continuidad y de frontera debido a que varias celdas colindan entre sí o al menos una de sus caras es parte de la frontera del dominio de solución.

Los métodos nodales, en este trabajo del tipo polinomial, aproximan la función por determinar mediante una combinación de funciones base asociadas a cada uno de los promedios de dicha función sobre las caras de una celda (6 en total) y en el volumen ocupado que tienen ciertas propiedades matemáticas. A continuación se definen los momentos de cara y de celda de la función $\psi(x, y, z)$.

$$\begin{aligned}
 m_L^{ij} &= \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} P_i(y)P_j(z)\psi(-1, y, z)dydz / N_iN_j \\
 m_R^{ij} &= \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} P_i(y)P_j(z)\psi(+1, y, z)dydz / N_iN_j \\
 m_N^{ij} &= \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} P_i(x)P_j(z)\psi(x, -1, z)dx dz / N_iN_j \\
 m_F^{ij} &= \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} P_i(x)P_j(z)\psi(x, +1, z)dx dz / N_iN_j \\
 m_B^{ij} &= \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} P_i(x)P_j(y)\psi(x, y, -1)dx dy / N_iN_j \\
 m_T^{ij} &= \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} P_i(x)P_j(y)\psi(x, y, +1)dx dy / N_iN_j \\
 & i, j = 0, \dots, l
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

$$\begin{aligned}
 m_C^{ijk} &= \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} P_i(x)P_j(y)P_k(z)\psi(x, y, z)dx dy dz / N_iN_jN_k \\
 & i, j, k = 0, \dots, l
 \end{aligned}$$

Donde L, R, N, F, B, T, C son las iniciales de las palabras en inglés Left, Right, Near, Far, Bottom y Top respectivamente y C indica el momento promedio de la celda (Ver **Figura 4.1**).

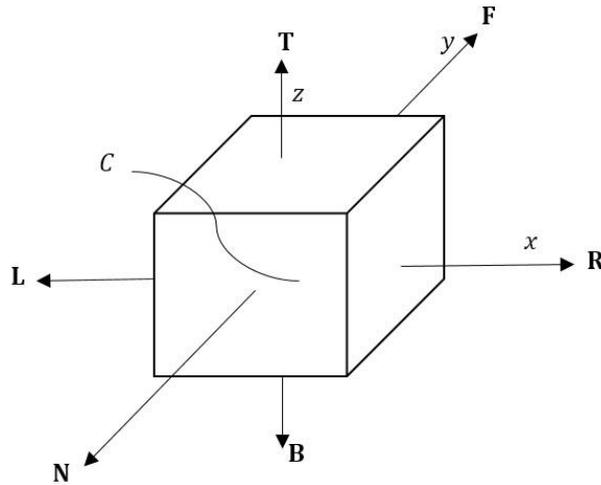


Figura 4.1 Representación de una celda en coordenadas rectangulares.

El orden de los métodos nodales está determinado por los grados de libertad l , lo cual determina el número de momentos definidos en cada dirección en la celda.

La función $\psi(x, y, z)$ está definida celda por celda y como se ve en los momentos está referenciada a la celda unitaria.

$$\Omega = [-1, +1] \times [-1, +1] \times [-1, +1] \quad (4.2)$$

Además P_i son los polinomios normalizados de Legendre de i -ésimo grado definido sobre $[-1, +1]$ mientras que $N_i = \frac{2}{2i+1}$ es el factor de normalización.

Como ejemplo se muestran los polinomios de Legendre para $i = 0, 1, 2$, en la variable x .

$$P_0(x) = 1; \quad P_1(x) = x; \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

Los polinomios de Legendre utilizados tienen las propiedades de ortogonalidad y paridad como se muestra a continuación

$$\int_{-1}^{+1} P_i(x)P_j(x)dx = N_i\delta_{ij} \quad (4.3)$$

$$P_i(+1) = 1, \quad P_i(-1) = (-1)^i$$

4.3 Método Nodal RTN-0

La función $\psi(x, y, z)$ puede ser expresada en términos de funciones base, que tienen características que hacen que se simplifiquen cálculos cuando se obtienen momentos de la función, pero es necesario conocer estas funciones base para los grados de libertad l que se requieran.

El índice de menor orden de los métodos nodales introducidos por Hennart se denomina RTN-0 (Raviart-Thomas-Nedeléc), el cual se obtiene al elegir $l=0$, por lo tanto $i = j = k = 0$.

Esta elección proporciona simplicidad en cuanto al número de incógnitas por determinar y el tamaño del sistema algebraico.

Capítulo 4

En este caso ($l=0$) las funciones base del método RTN-0 son:

$$\begin{aligned}u_L^{00}(x, y, z) &= -\frac{1}{2}(P_{100} - P_{200}) \\u_R^{00}(x, y, z) &= +\frac{1}{2}(P_{100} + P_{200}) \\u_N^{00}(x, y, z) &= -\frac{1}{2}(P_{010} - P_{020}) \\u_F^{00}(x, y, z) &= +\frac{1}{2}(P_{010} + P_{020}) \\u_B^{00}(x, y, z) &= -\frac{1}{2}(P_{001} - P_{002}) \\u_T^{00}(x, y, z) &= +\frac{1}{2}(P_{001} + P_{002}) \\u_C^{000}(x, y, z) &= P_{000} - P_{200} - P_{020} - P_{002}\end{aligned}\tag{4.4}$$

donde

$$P_{ijk}(x, y, z) = P_i(x)P_j(y)P_k(z).$$

Considerando estas funciones base, la función $\psi(x, y, z)$ puede representar la solución aproximada dentro de una celda de la siguiente forma:

$$\psi(x, y, z) = \sum_E \psi_E^{00} u_E^{00}(x, y, z) + \psi_C^{000} u_C^{000}(x, y, z)\tag{4.5}$$

donde $E = L, R, N, F, B, T$.

ψ_E^{00} y ψ_C^{000} son los valores por determinar de la función ψ en cada cara de la celda y el valor promedio de celda.

4.4 Aplicación del método nodal RTN-0

Para implementar la cinética en el código AZTRAN se partió del código en estado estacionario donde la parte espacial se discretiza por el método nodal RTN-0 ^[18] y la parte temporal de AZTRAN por el método θ , así que en esta sección se describirá la aplicación del método RTN-0 en AZTRAN en estado estacionario y en el siguiente capítulo finalmente se describirán las implementaciones que se requieren para la parte temporal.

Recordando que la ecuación en estado estacionario crítico está dada por

$$\hat{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \psi(\vec{r}, \hat{\Omega}, E) + \Sigma_t(\vec{r}, E) \psi(\vec{r}, \hat{\Omega}, E) = S(\vec{r}, \hat{\Omega}, E) \quad (4.6)$$

donde:

$$S(\vec{r}, \hat{\Omega}, E) = \int_{4\pi} d\hat{\Omega}' \int_0^\infty dE' \Sigma_s(\vec{r}, \hat{\Omega}' \rightarrow \hat{\Omega}, E' \rightarrow E) \psi(\vec{r}, \hat{\Omega}', E') + \chi(E) \int_{4\pi} d\hat{\Omega}' \int_0^\infty dE' \nu \Sigma_f(\vec{r}, E') \psi(\vec{r}, \hat{\Omega}', E') \quad (4.7)$$

Se considera además la aproximación S_n de la ecuación de transporte para G grupos de energía, N direcciones angulares y dominio $\Omega = [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$.

Si se define una partición, no necesariamente uniforme, para cada uno de los intervalos del dominio, se obtienen I por J por K celdas. Así se dirá que, la celda discreta Ω_{ijk} tiene volumen $\Delta x_i \times \Delta y_j \times \Delta z_k$.

Al hacer uso del método RTN-0 se debe tener presente que las funciones base están referenciadas a la celda unitaria $\Omega = [-1, +1] \times [-1, +1] \times [-1, +1]$, por lo tanto se debe hacer un cambio de variable apropiado para relacionar los cálculos en la celda unitaria con las celdas

Realizando los cambios de variables:

$$\alpha = \frac{2x - (x_{i+1} + x_i)}{(x_{i+1} - x_i)}, \quad \beta = \frac{2y - (y_{j+1} + y_j)}{(y_{j+1} - y_j)}, \quad \gamma = \frac{2z - (z_{k+1} + z_k)}{(z_{k+1} - z_k)}$$

Capítulo 4

donde el dominio de la celda sea $(\alpha, \beta, \gamma) \in [-1, +1] \times [-1, +1] \times [-1, +1]$.

En el método RTN-0 se aproxima el flujo angular por:

$$\begin{aligned} \psi \sim \psi_h = & \psi_L^{00} u_L^{00}(x, y, z) + \psi_R^{00} u_R^{00}(x, y, z) + \psi_N^{00} u_N^{00}(x, y, z) + \psi_F^{00} u_F^{00}(x, y, z) \\ & + \psi_B^{00} u_B^{00}(x, y, z) + \psi_T^{00} u_T^{00}(x, y, z) + \psi_C^{000} u_C^{000}(x, y, z). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Cada uno de los momentos del flujo angular recientemente mencionados está definido en la siguiente forma

$$\begin{aligned} \psi_L^{00} &= \frac{1}{4} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \psi(-1, y, z) dy dz \\ \psi_R^{00} &= \frac{1}{4} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \psi(+1, y, z) dy dz \\ \psi_N^{00} &= \frac{1}{4} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \psi(x, -1, z) dx dz \\ \psi_F^{00} &= \frac{1}{4} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \psi(x, +1, z) dx dz \\ \psi_B^{00} &= \frac{1}{4} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \psi(x, y, -1) dx dy \\ \psi_T^{00} &= \frac{1}{4} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \psi(x, y, +1) dx dy \\ \psi_C^{000} &= \frac{1}{8} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \psi(x, y, z) dx dy dz \end{aligned} \quad (4.9)$$

como puede observarse la aproximación involucra 7 parámetros de los cuales 4 son incógnitas ya que las 3 restantes se conocerán ya sea por condiciones de frontera o por solución en una celda anterior.

De esta forma es necesario construir un sistema algebraico de 4 ecuaciones.

Las ecuaciones de este sistema corresponden a los momentos (000), (100), (010), (001) de la ecuación que son:

$$\begin{aligned}
 \frac{\mu}{\Delta x_i} (\psi_R^{00} - \psi_L^{00}) + \frac{\eta}{\Delta y_j} (\psi_F^{00} - \psi_N^{00}) + \frac{\xi}{\Delta z_k} (\psi_T^{00} - \psi_B^{00}) + \Sigma_t \psi_C^{000} &= S^{000} \\
 \frac{3\mu}{\Delta x_i} (\psi_R^{00} + \psi_L^{00} - 2\psi_C^{000}) + \frac{\eta}{\Delta y_j} (\psi_F^{10} - \psi_N^{10}) + \frac{\xi}{\Delta z_k} (\psi_T^{10} - \psi_B^{10}) + \Sigma_t \psi_C^{100} &= S^{100} \\
 \frac{\mu}{\Delta x_i} (\psi_R^{10} - \psi_L^{10}) + \frac{3\eta}{\Delta y_j} (\psi_F^{00} + \psi_N^{00} - 2\psi_C^{000}) + \frac{\xi}{\Delta z_k} (\psi_T^{01} - \psi_B^{01}) + \Sigma_t \psi_C^{010} &= S^{010} \\
 \frac{\mu}{\Delta x_i} (\psi_R^{01} - \psi_L^{01}) + \frac{\eta}{\Delta y_j} (\psi_F^{01} - \psi_N^{01}) + \frac{3\xi}{\Delta z_k} (\psi_T^{00} + \psi_B^{00} - 2\psi_C^{000}) + \Sigma_t \psi_C^{001} &= S^{001}.
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

Ahora, es importante señalar que este conjunto de ecuaciones están involucradas más incógnitas que ecuaciones. Sin embargo las incógnitas adicionales están relacionadas con los parámetros involucrados en las aproximaciones para el flujo angular de neutrones de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 \psi_L^{10} &= \psi_R^{10} \\
 \psi_N^{10} &= \psi_F^{10} \\
 \psi_B^{10} &= \psi_T^{10} \\
 \psi_L^{01} &= \psi_R^{01} \\
 \psi_N^{01} &= \psi_F^{01} \\
 \psi_B^{01} &= \psi_T^{01} \\
 \psi_C^{100} &= \frac{1}{2} (\psi_R^{00} - \psi_L^{00}) \\
 \psi_C^{010} &= \frac{1}{2} (\psi_F^{00} - \psi_N^{00}) \\
 \psi_C^{001} &= \frac{1}{2} (\psi_T^{00} - \psi_B^{00}).
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

Una vez que estas ecuaciones se sustituyen en las ecuaciones (4.10) se obtiene el siguiente sistema de cuatro ecuaciones que involucra a los cuatro parámetros incógnita ya mencionados, que al resolver el sistema se obtiene la solución del flujo.

$$\begin{pmatrix} \frac{3\mu}{\Delta x_i} + \frac{\Sigma_t}{2} & 0 & 0 & -\frac{6\mu}{\Delta x_i} \\ 0 & \frac{3\eta}{\Delta y_j} + \frac{\Sigma_t}{2} & 0 & -\frac{6\eta}{\Delta y_j} \\ 0 & 0 & \frac{3\xi}{\Delta z_k} + \frac{\Sigma_t}{2} & -\frac{6\varepsilon}{\Delta z_k} \\ \frac{\mu}{\Delta x_i} & \frac{\eta}{\Delta y_j} & \frac{\xi}{\Delta z_k} & \Sigma_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{RL} \\ \psi_{FN} \\ \psi_{TB} \\ \psi_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} WL \cdot S^{100} + \left(-\frac{3\mu}{\Delta x_i} + \frac{\Sigma_t}{2} \right) P_{LR} \\ WN \cdot S^{010} + \left(-\frac{3\eta}{\Delta y_j} + \frac{\Sigma_t}{2} \right) P_{NF} \\ WB \cdot S^{001} + \left(-\frac{3\xi}{\Delta z_k} + \frac{\Sigma_t}{2} \right) P_{BT} \\ S^{000} + \frac{\mu}{\Delta x_i} P_{LR} + \frac{\eta}{\Delta y_j} P_{NF} + \frac{\varepsilon}{\Delta z_k} P_{BT} \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

donde los parámetros toman los siguientes valores dependiendo de cómo entran los neutrones:

<p>Para $\mu > 0$</p> <p>$\psi_{LR} = \psi_R$</p> <p>$P_{LR} = P_L = \psi_L$</p> <p>$WL = 1.0$</p> <p>Para $\mu < 0$</p> <p>$\psi_{LR} = \psi_L$</p> <p>$P_{LR} = P_R = \psi_R$</p> <p>$WL = -1.0$</p>	<p>Para $\eta > 0$</p> <p>$\psi_{NF} = \psi_F$</p> <p>$P_{NF} = P_N = \psi_N$</p> <p>$WN = 1.0$</p> <p>Para $\eta < 0$</p> <p>$\psi_{NF} = \psi_N$</p> <p>$P_{NF} = P_F = \psi_F$</p> <p>$WN = -1.0$</p>	<p>Para $\xi > 0$</p> <p>$\psi_{BT} = \psi_T$</p> <p>$P_{BT} = P_B = \psi_B$</p> <p>$WB = 1.0$</p> <p>Para $\xi < 0$</p> <p>$\psi_{BT} = \psi_B$</p> <p>$P_{BT} = P_T = \psi_T$</p> <p>$WB = -1.0$</p>
--	--	--

donde WL, WN, WB son factores que toman valor positivo o negativo dependiendo de cómo entran los neutrones, $\psi_{LR}, \psi_{NF}, \psi_{BT}$ son las incógnitas del flujo angular que también dependen de cómo lleguen los neutrones y finalmente P_{LR}, P_{NF}, P_{BT} son los flujos angulares conocidos por condiciones de frontera o por otra celda que dependen de cómo lleguen los neutrones.

De esta forma se aplica el método nodal RTN-0 en el código AZTRAN en estado estacionario, en el siguiente capítulo se describe la discretización en tiempo así como los cambios realizados para la implementación de la cinética.

Capítulo 5

Discretización en Tiempo Usando el Método θ de Integración

5.1 Introducción

Una vez obtenido el conjunto de ecuaciones dados por la ecuación (4.12) el siguiente paso consiste en discretizar con respecto al tiempo t , lo cual permitirá conocer el flujo angular de neutrones y la concentración de precursores en cada paso de tiempo.

Esta discretización se puede hacer aplicando el método θ de integración en las ecuaciones de transporte y en las de precursores, el cual se describe a continuación ^[16,19,20].

5.2 Método θ de integración

En general, el método θ de integración consiste en aproximar la integral de una función $\psi(t)$ en el intervalo de tiempo $[t_k, t_{k+1}]$ de la siguiente forma:

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} \psi(t) dt \cong \Delta t_k [\theta \psi(t_{k+1}) + (1-\theta) \psi(t_k)] \quad (5.1)$$

con $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$

donde:

θ : parámetro de integración

ψ : función por integrar, que en este caso es el flujo angular de neutrones o la concentración de precursores respectivamente.

Para casos especiales de θ , cuando $\theta=1$ la aplicación del método a la ecuación de transporte conduce al método de Euler hacia atrás, cuando $\theta=0$ es el método de Euler hacia adelante y cuando $\theta=1/2$ es el método de Crank-Nicolson. Cabe resaltar que el código AZTRAN está implementado para cualquier θ en ese intervalo, sin embargo el código tiene restringido para $\theta=0$ ya que se necesitan pasos de tiempo muy pequeños.

Para el caso particular se eligen θ_f y θ_p como parámetros de integración para el flujo angular de neutrones y la concentración de precursores respectivamente.

5.3 Integración en tiempo de las ecuaciones cinéticas de transporte

Se parte de la ecuación de transporte dependiente del tiempo escrita de forma simplificada para un grupo de energía.

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\hat{\Omega} \cdot \nabla \psi - \Sigma_t \psi + S \quad (5.2)$$

Usando la ecuación de transporte se integra en el intervalo $[t_k, t_{k+1}]$ de forma tal que:

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{1}{v} \frac{\partial \psi}{\partial t} dt = \int (-\hat{\Omega} \cdot \nabla \psi - \Sigma_t \psi + S) dt \quad (5.3)$$

al integrar se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\psi^{t_{k+1}} - \psi^{t_k}}{v \Delta t} &= -\theta_f \hat{\Omega} \cdot \nabla \psi^{t_{k+1}} - \theta_f \Sigma_t^{t_{k+1}} \psi^{t_{k+1}} + \theta_f S^{t_{k+1}} \\ &- (1 - \theta_f) \hat{\Omega} \cdot \nabla \psi^{t_k} - (1 - \theta_f) \Sigma_t^{t_k} \psi^{t_{k+1}} + (1 - \theta_f) S^{t_{k+1}} \end{aligned} \quad (5.4)$$

realizando los despejes correspondientes la ecuación queda de la forma:

$$\begin{aligned} \theta_f \hat{\Omega} \cdot \nabla \psi^{t_{k+1}} + \left(\theta_f \Sigma_t^{t_{k+1}} + \frac{1}{v \Delta t} \right) \psi^{t_{k+1}} &= \theta_f S^{t_{k+1}} + (1 - \theta_f) S^{t_k} \\ - (1 - \theta_f) \hat{\Omega} \cdot \nabla \psi^{t_k} - (1 - \theta_f) \Sigma_t^{t_k} \psi^{t_{k+1}} &+ \frac{1}{v \Delta t} \psi^{t_k}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Al usar esta implementación en el código AZTRAN permite obtener a ψ^{t_k} , con el que se calculan $C^{t_{k+1}}$ que son los precursores al tiempo t_{k+1} .

Estas ecuaciones se pueden extender para la ecuación de transporte en multigrupos y aproximación S_n .

$$\begin{aligned}
 & \theta_f \left(\mu_n \frac{\partial \psi_{g,n}^{t_{k+1}}}{\partial x} + \eta_n \frac{\partial \psi_{g,n}^{t_{k+1}}}{\partial y} + \xi_n \frac{\partial \psi_{g,n}^{t_{k+1}}}{\partial z} \right) + \left(\theta_f \Sigma_t^{t_{k+1}} + \frac{1}{v_g \Delta t} \right) \psi_{g,n}^{t_{k+1}} \\
 & = \theta_f S_{g,n}^{t_{k+1}} + (1 - \theta_f) S_{g,n}^{t_k} + \left(\frac{1}{v_g \Delta t} \right) \psi_{g,n}^{t_k} - \\
 & (1 - \theta_f) \left(\mu_n \frac{\partial \psi_{g,n}^{t_k}}{\partial x} + \eta_n \frac{\partial \psi_{g,n}^{t_k}}{\partial y} + \xi_n \frac{\partial \psi_{g,n}^{t_k}}{\partial z} \right) - (1 - \theta_f) \Sigma_t^{t_k} \psi_{g,n}^{t_k} \\
 & g = 1, \dots, G \\
 & n = 1, \dots, N
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

Finalmente se desarrolla $S_g^{t_{k+1}}$ y $S_g^{t_k}$ que son las fuentes sin tomar en cuenta fuentes externas

$$\begin{aligned}
 S_{g,n}^{t_{k+1}} & = \sum_{g'=1}^G \Sigma_{S_{g' \rightarrow g}}^{t_{k+1}} \phi_{g'}^{t_{k+1}} + (1 - \beta) \chi_{p_g} \sum_{g'=1}^G \nu \Sigma_{fg'}^{t_{k+1}} \phi_{g'}^{t_{k+1}} + \frac{\chi_{d_g}}{\theta_f} \sum_{i=1}^I \lambda_i \left[\theta_{pi} C_i^{t_{k+1}} \right] \\
 S_{g,n}^{t_k} & = \sum_{g'=1}^G \Sigma_{S_{g' \rightarrow g}}^{t_k} \phi_{g'}^{t_k} + (1 - \beta) \chi_{p_g} \sum_{g'=1}^G \nu \Sigma_{fg'}^{t_k} \phi_{g'}^{t_k} + \frac{\chi_{d_g}}{\theta_f} \sum_{i=1}^I \lambda_i \left[(1 - \theta_{pi}) C_i^{t_k} \right] \\
 & g = 1, \dots, G \\
 & i = 1, \dots, I
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

donde ϕ es el flujo escalar correspondiente al flujo angular ψ .

Como en la ecuación de transporte dependiente del tiempo, se tiene aparte el término de variación de las concentraciones de precursores de neutrones retardados que está dado por

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial C_i}{\partial t} & = \beta_i \sum_{g'=1}^G \nu \Sigma_{fg'} \phi_{g'} - \lambda_i C_i \\
 & i = 1, \dots, I
 \end{aligned} \tag{5.8}$$

se integra la ecuación (5.8) en el intervalo $[t_k, t_{k+1}]$ con el método θ , obteniendo:

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\partial C_i}{\partial t} dt = \int (\beta_i \sum_{g'=1}^G \nu \Sigma_{fg'} \phi_{g'}^{t_{k+1}}) dt - \int (\lambda_i C_i) dt; \quad i = 1, \dots, I \quad (5.9)$$

dando como resultado:

$$\begin{aligned} \frac{C_i^{t_{k+1}} - C_i^{t_k}}{\Delta t_k} &= \theta_f \beta_i \sum_{g'=1}^G \nu \Sigma_{fg'}^{t_{k+1}} \phi_{g'}^{t_{k+1}} + (1 - \theta_f) \beta_i \sum_{g'=1}^G \nu \Sigma_{fg'}^{t_k} \phi_{g'}^{t_k} \\ &- \lambda_i [\theta_{pi} C_i^{t_{k+1}} + (1 - \theta_{pi}) C_i^{t_k}]; \quad i = 1, \dots, I \end{aligned} \quad (5.10)$$

de tal manera que agrupando términos se obtiene

$$\begin{aligned} [1 + \lambda_i \Delta t_k \theta_{pi}] C_i^{t_{k+1}} &= [1 - \lambda_i (1 - \theta_{pi}) \Delta t_k] C_i^{t_k} + \theta_f \beta_i \Delta t_k \sum_{g'=1}^G \nu \Sigma_{fg'}^{t_{k+1}} \phi_{g'}^{t_{k+1}} \\ &+ (1 - \theta_f) \beta_i \Delta t_k \sum_{g'=1}^G \nu \Sigma_{fg'}^{t_k} \phi_{g'}^{t_k}; \quad i = 1, \dots, I \end{aligned} \quad (5.11)$$

y finalmente la concentración de precursores de neutrones al tiempo t_{k+1} se calcula de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} C_i^{t_{k+1}} &= \frac{1 - \lambda_i (1 - \theta_{pi}) \Delta t_k}{1 + \lambda_i \Delta t_k \theta_{pi}} C_i^{t_k} + \frac{\theta_f \beta_i \Delta t_k}{1 + \lambda_i \Delta t_k \theta_{pi}} \sum_{g'=1}^G \nu \Sigma_{fg'}^{t_{k+1}} \phi_{g'}^{t_{k+1}} \\ &+ \frac{(1 - \theta_f) \beta_i \Delta t_k}{1 + \lambda_i \Delta t_k \theta_{pi}} \sum_{g'=1}^G \nu \Sigma_{fg'}^{t_k} \phi_{g'}^{t_k}; \quad i = 1, \dots, I \end{aligned} \quad (5.12)$$

por último, sustituyendo (5.12) en (5.6) y agrupando términos, se obtiene la siguiente ecuación.

$$\begin{aligned}
 & \theta_f \hat{\Omega} \cdot \nabla \psi_{g,n}^{t_{k+1}} + (\theta_f \Sigma_t^{t_{k+1}} + \frac{1}{v_g \Delta t}) \psi_{g,n}^{t_{k+1}} = \\
 & \theta_f \left[\sum_{g'=1}^G \Sigma_{s_{g' \rightarrow g}}^{t_{k+1}} \phi_{g'}^{t_{k+1}} + \left((1-\beta) \chi_{p_g} + \chi_{d_g} \sum_{i=1}^I \frac{\lambda_i \theta_{pi} \beta_i \Delta t_k}{1 + \lambda_i \Delta t_k \theta_{pi}} \right) \sum_{g'=1}^G v \Sigma_{fg'}^{t_{k+1}} \phi_{g'}^{t_{k+1}} \right] + \\
 & (1-\theta_f) \left[\sum_{g'=1}^G \Sigma_{s_{g' \rightarrow g}}^{t_k} \phi_{g'}^{t_k} + \left((1-\beta) \chi_{p_g} + \chi_{d_g} \sum_{i=1}^I \frac{\lambda_i \theta_{pi} \beta_i \Delta t_k}{1 + \lambda_i \Delta t_k \theta_{pi}} \right) \sum_{g'=1}^G v \Sigma_{fg'}^{t_k} \phi_{g'}^{t_k} \right] + \\
 & -(1-\theta_f) \hat{\Omega} \cdot \nabla \psi_{g,n}^{t_k} - (1-\theta_f) \Sigma_t^{t_k} \psi_{g,n}^{t_k} + \\
 & \chi_{d_g} \sum_{i=1}^I \frac{\lambda_i}{1 + \lambda_i \Delta t_k \theta_{pi}} C_i^{t_k} + \frac{1}{v_g \Delta t} \psi_{g,n}^{t_k} \\
 & g = 1, \dots, G \\
 & i = 1, \dots, I \\
 & n = 1, \dots, N
 \end{aligned} \tag{5.13}$$

Se observa que las ecuaciones (5.12) y (5.13) pueden ser resueltas si se conocen ψ^{t_k} y $C_i^{t_k}$ antes de comenzar a resolver el problema con dependencia en tiempo por condiciones iniciales se conoce $\psi^{(0)}$ y $C_i^{(0)}$ por lo tanto la solución para todo el dominio del tiempo es posible.

5.4 Integración de la dependencia en tiempo en el código AZTRAN

Para implementar la cinética al código AZTRAN se modificó la solución que se tiene en estado estacionario para acoplar las ecuaciones con dependencia en tiempo y que resuelva el sistema a cada paso de tiempo.

Se requiere que en el cálculo de los momentos de la fuente se implemente la parte de las concentraciones de precursores y hacer modificaciones al sistema algebraico como se muestra a continuación:

$$\begin{pmatrix} \frac{3\mu}{\Delta x_i} + \frac{\Sigma_t^*}{2} & 0 & 0 & -\frac{6\mu}{\Delta x_i} \\ 0 & \frac{3\eta}{\Delta y_j} + \frac{\Sigma_t^*}{2} & 0 & -\frac{6\eta}{\Delta y_j} \\ 0 & 0 & \frac{3\xi}{\Delta z_k} + \frac{\Sigma_t^*}{2} & -\frac{6\xi}{\Delta z_k} \\ \frac{\mu}{\Delta x_i} & \frac{\eta}{\Delta y_j} & \frac{\xi}{\Delta z_k} & \Sigma_t^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{RL} \\ \psi_{FN} \\ \psi_{TB} \\ \psi_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} WL \cdot S^{100} + \left(-\frac{3\mu}{\Delta x_i} + \frac{\Sigma_t^*}{2} \right) P_{LR} + \frac{1}{v\Delta t_k} WL \frac{P_{LRK}}{2} \\ WN \cdot S^{010} + \left(-\frac{3\eta}{\Delta y_j} + \frac{\Sigma_t^*}{2} \right) P_{NF} + \frac{1}{v\Delta t_k} WN \frac{P_{NFK}}{2} \\ WB \cdot S^{001} + \left(-\frac{3\xi}{\Delta z_k} + \frac{\Sigma_t^*}{2} \right) P_{BT} + \frac{1}{v\Delta t_k} WB \frac{P_{BTK}}{2} \\ S^{000} + \frac{\mu}{\Delta x_i} P_{LR} + \frac{\eta}{\Delta y_j} P_{NF} + \frac{\xi}{\Delta z_k} P_{BT} + \frac{1}{v\Delta t_k} P_{CK} \end{pmatrix} \quad (5.14)$$

donde los parámetros toman los siguientes valores dependiendo de cómo entran los neutrones al tiempo t_{k+1} en la celda $[x_L, x_R] \times [y_N, y_F] \times [z_B, z_T]$:

Para $\mu > 0$	Para $\eta > 0$	Para $\xi > 0$
$\psi_{LR} = \psi_R^{t_{k+1}}$	$\psi_{NF} = \psi_F^{t_{k+1}}$	$\psi_{BT} = \psi_T^{t_{k+1}}$
$P_{LR} = P_L = \psi_L^{t_{k+1}}$	$P_{LR} = P_N = \psi_N^{t_{k+1}}$	$P_{BT} = P_B = \psi_B^{t_{k+1}}$
$P_{LK} = \psi_L^{t_k}$	$P_{NK} = \psi_N^{t_k}$	$P_{BK} = \psi_B^{t_k}$
$WL = 1.0$	$WN = 1.0$	$WB = 1.0$
Para $\mu < 0$	Para $\eta < 0$	Para $\xi < 0$
$\psi_{LR} = \psi_L^{t_{k+1}}$	$\psi_{NF} = \psi_N^{t_{k+1}}$	$\psi_{BT} = \psi_B^{t_{k+1}}$
$P_{LR} = P_R = \psi_R^{t_{k+1}}$	$P_{NF} = P_F = \psi_F^{t_{k+1}}$	$P_{BT} = P_T = \psi_T^{t_{k+1}}$
$P_{RK} = \psi_R^{t_k}$	$P_{FK} = \psi_F^{t_k}$	$P_{TK} = \psi_T^{t_k}$
$WL = -1.0$	$WN = -1.0$	$WB = -1.0$

donde:

$$P_{LRK} = P_{RK} - P_{LK} \quad P_{NFK} = P_{FK} - P_{NK} \quad P_{BTK} = P_{TK} - P_{BK}$$

$$P_{CK} = \psi_C^{t_k}$$

de los nuevos parámetros que se implementaron son los flujos al tiempo t_k o al tiempo anterior que se recalculan a cada paso de tiempo y la implementación de la nueva sección eficaz total dada por:

$$\Sigma_t^* = \Sigma_t^{t_{k+1}} + \frac{1}{v\Delta t_k} \quad (5.15)$$

con este sistema se completa el conjunto de ecuaciones del esquema nodal RTN-0 que se resuelve en el código AZTRAN con dependencia en tiempo de forma directa, en el siguiente capítulo se describe otra metodología para resolver la ecuación de transporte dependiente del tiempo partiendo de la solución directa con $\theta=1$.

Capítulo 6

Descripción de la Aproximación Cuasi- estática Mejorada

6.1 Introducción

Los códigos se modernizan constantemente debido a los avances en las herramientas de cómputo, ya que se tienen mayores capacidades de cálculo, incluso con menores tiempos de ejecución, lo cual permite tener modelos matemáticos más apegados a la física real de los fenómenos simulados, con una mejor aproximación del comportamiento real.

El tiempo de cómputo para resolver la ecuación de transporte tridimensional con dependencia en tiempo varía según el transitorio que se quiera simular y el sistema que se desea modelar, pudiendo ser éste un tiempo significativo al tener modelos detallados, es por esto que se implementan técnicas para reducir el tiempo de cómputo. Con este fin se le implementó la técnica de la aproximación cuasi-estática mejorada al código AZTRAN.

La aproximación cuasi-estática es una herramienta estándar para la solución de espacio-tiempo de los problemas de transporte de neutrones en un medio multiplicativo y fue introducida por A. F. Henry ^[6]. El algoritmo frecuentemente usado fue desarrollado por Ott Meneley llamado aproximación cuasi-estática mejorada (IQM) ^[21].

El principio de este método es la factorización del flujo angular en el producto de dos funciones, una de forma y otra de amplitud, donde la función de forma depende de todas las variables incluyendo el tiempo y la función de amplitud depende del tiempo. La ecuación de la función de forma se resuelve en una escala de tiempo larga y la ecuación de la función de amplitud se determina en una escala de tiempo corta ^[22-25].

La implementación de esta metodología en AZTRAN se realizó en dos módulos, un módulo resuelve la ecuación de forma directa y el otro módulo resuelve la ecuación usando la aproximación cuasi-estática mejorada, dando la opción al usuario de elegir el módulo a usar.

6.2 Metodología de la aproximación cuasi-estática mejorada

La metodología de la aproximación cuasi-estática mejorada ^[26] parte de la ecuación de transporte de neutrones dependiente del tiempo sin fuentes externas definida por

$$\begin{aligned} \frac{1}{v(E)} \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, \hat{\Omega}, E, t) + \hat{\Omega} \cdot \nabla \psi(\vec{r}, \hat{\Omega}, E, t) + \Sigma_t(\vec{r}, E, t) \psi(\vec{r}, \hat{\Omega}, E, t) = \\ \int_{4\pi} d\hat{\Omega}' \int_0^\infty dE' \Sigma_s(\vec{r}, \hat{\Omega}' \rightarrow \hat{\Omega}, E' \rightarrow E, t) \psi(\vec{r}, \hat{\Omega}', E', t) + \\ (1 - \beta) \chi_p(E) \int_{4\pi} d\hat{\Omega}' \int_0^\infty dE' v \Sigma_f(\vec{r}, E', t) \psi(\vec{r}, \hat{\Omega}', E', t) + \chi_d(E) \sum_{i=1}^I \lambda_i C_i(\vec{r}, t) \end{aligned} \quad (6.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} C_i(\vec{r}, t) = \beta_i \int_{4\pi} d\hat{\Omega}' \int_0^\infty dE' v \Sigma_f(\vec{r}, E', t) \psi(\vec{r}, \hat{\Omega}', E', t) - \lambda_i C_i ; i = 1, \dots, I \quad (6.2)$$

y también se retoma la ecuación de transporte adjunta en estado estacionario que está dada por la siguiente ecuación al tiempo $t=0$.

$$\begin{aligned} -\hat{\Omega} \cdot \nabla \psi^\dagger(\vec{r}, \hat{\Omega}, E) + \Sigma_t(\vec{r}, E) \psi^\dagger(\vec{r}, \hat{\Omega}, E) = \int_{4\pi} d\hat{\Omega}' \int_0^\infty dE' \Sigma_s(\vec{r}, \hat{\Omega} \rightarrow \hat{\Omega}', E \rightarrow E') \psi^\dagger(\vec{r}, \hat{\Omega}', E') \\ + v \Sigma_f(\vec{r}, E, t) \int_{4\pi} d\hat{\Omega}' \int_0^\infty dE' \chi(E') \psi^\dagger(\vec{r}, \hat{\Omega}', E', t) \end{aligned} \quad (6.3)$$

El siguiente paso es factorizar el flujo angular como el producto de dos funciones, la de amplitud $P(t)$ y la de forma $\varphi(\vec{r}, \hat{\Omega}, E, t)$.

$$\psi(\vec{r}, \hat{\Omega}, E, t) = \varphi(\vec{r}, \hat{\Omega}, E, t) P(t) \quad (6.4)$$

Esta factorización requiere adicionalmente una restricción de separación para $t > 0$ a fin de hacer única dicha factorización.

Existen muchas condiciones que podrían usarse y todas ellas involucran restricciones sobre la integral espacio-energía de $\varphi(\vec{r}, \hat{\Omega}, E, t)$ a un valor constante para toda $t > 0$. El único requerimiento básico es que $\varphi(\vec{r}, \hat{\Omega}, E, t)$ se mantenga positiva y acotada en todos los puntos del espacio $(\vec{r}, \hat{\Omega}, E)$ para todo tiempo.

La siguiente ecuación satisface los requerimientos de la condición de restricción y tiene además la ventaja de que facilita la transición a la formación de las ecuaciones de la cinética puntual, donde C es una constante.

$$\iiint \varphi(\vec{r}, \hat{\Omega}, E, t) \frac{1}{v(E)} \psi^\dagger(\vec{r}, \hat{\Omega}, E) d\hat{\Omega} dE dV = C \quad (6.5)$$

El siguiente paso es encontrar las ecuaciones de la función de forma y de amplitud y se empieza sustituyendo la ecuación (6.4) en la ecuación de transporte y multiplicando por ψ^\dagger se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{1}{v(E)} \frac{\partial}{\partial t} P(t) \varphi(\vec{r}, \hat{\Omega}, E, t) \psi^\dagger + \hat{\Omega} \cdot \nabla P(t) \varphi(\vec{r}, \hat{\Omega}, E, t) \psi^\dagger + \Sigma_t(\vec{r}, E, t) P(t) \varphi(\vec{r}, \hat{\Omega}, E, t) \psi^\dagger = \\ \psi^\dagger \int_{4\pi} d\hat{\Omega}' \int_0^\infty dE' \Sigma_s(\vec{r}, \hat{\Omega}' \rightarrow \hat{\Omega}, E' \rightarrow E, t) P(t) \varphi(\vec{r}, \hat{\Omega}', E', t) + \\ \psi^\dagger (1 - \beta) \chi_p(E) \int_{4\pi} d\hat{\Omega}' \int_0^\infty dE' v \Sigma_f(\vec{r}, E') P(t) \varphi(\vec{r}, \hat{\Omega}', E', t) + \\ \psi^\dagger \chi_d(E) \sum_{i=1}^I \lambda_i C_i(\vec{r}, t) \end{aligned} \quad (6.6)$$

después, la ecuación de transporte adjunta en estado estacionario se multiplica por $\psi(\vec{r}, \hat{\Omega}, E, t)$ y se usa la condición de separabilidad para obtener

$$\begin{aligned} -(\hat{\Omega} \cdot \nabla \psi^\dagger) P(t) \varphi(\vec{r}, \hat{\Omega}, E, t) + \Sigma_t(\vec{r}, E) \psi^\dagger P(t) \varphi(\vec{r}, \hat{\Omega}, E, t) = \\ P(t) \varphi(\vec{r}, \hat{\Omega}, E, t) \int_{4\pi} d\hat{\Omega}' \int_0^\infty dE' \Sigma_s(\vec{r}, \hat{\Omega} \rightarrow \hat{\Omega}', E \rightarrow E') \psi^\dagger + \\ P(t) \varphi(\vec{r}, \hat{\Omega}, E, t) v \Sigma_f(\vec{r}, E) \int_{4\pi} d\hat{\Omega}' \int_0^\infty dE' \chi(E') \psi^\dagger \end{aligned} \quad (6.7)$$

finalmente la ecuación (6.7) se resta a la ecuación (6.6) y se obtiene

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{v(E)} \frac{\partial}{\partial t} P(t) \varphi(\vec{r}, \hat{\Omega}, E, t) \psi^\dagger + \hat{\Omega} \cdot \nabla [P(t) \varphi(\vec{r}, \hat{\Omega}, E, t)] \psi^\dagger + \\
 & (\hat{\Omega} \cdot \nabla \psi^\dagger) P(t) \varphi(\vec{r}, \hat{\Omega}, E, t) + \Sigma_t(\vec{r}, E, t) P(t) \varphi(\vec{r}, \hat{\Omega}, E, t) \psi^\dagger \\
 & - \Sigma_t(\vec{r}, E) \psi^\dagger P(t) \varphi(\vec{r}, \hat{\Omega}, E, t) = \\
 & \psi^\dagger \int_{4\pi} d\hat{\Omega}' \int_0^\infty dE' \Sigma_s(\vec{r}, \hat{\Omega}' \rightarrow \hat{\Omega}, E' \rightarrow E, t) P(t) \varphi(\vec{r}, \hat{\Omega}' E', t) \\
 & - P(t) \varphi(\vec{r}, \hat{\Omega}, E, t) \int_{4\pi} d\hat{\Omega}' \int_0^\infty dE' \Sigma_s(\vec{r}, \hat{\Omega} \rightarrow \hat{\Omega}', E \rightarrow E') \psi^\dagger \\
 & + \psi^\dagger (1 - \beta) \chi_p(E) \int_{4\pi} d\hat{\Omega}' \int_0^\infty dE' \nu \Sigma_f(\vec{r}, E', t) P(t) \varphi(\vec{r}, \hat{\Omega}', E', t) \\
 & - P(t) \varphi(\vec{r}, \hat{\Omega}, E, t) \nu \Sigma_f(\vec{r}, E) \int_{4\pi} d\hat{\Omega}' \int_0^\infty dE' \chi(E') \psi^\dagger + \psi^\dagger \chi_d(E) \sum_{i=1}^I \lambda_i C_i(\vec{r}, t). \quad (6.8)
 \end{aligned}$$

Esta ecuación es integrada sobre todo el espacio, energía y ángulo y a continuación se llevan a cabo las integraciones de cada término, para el primero se tiene

$$\begin{aligned}
 & \iiint \frac{1}{v(E)} \frac{\partial}{\partial t} P(t) \varphi(\vec{r}, \hat{\Omega}, E, t) \psi^\dagger(\vec{r}, \hat{\Omega}, E) d\hat{\Omega} dE dV \\
 & = P(t) \frac{\partial}{\partial t} \iiint \varphi(\vec{r}, \hat{\Omega}, E, t) \frac{1}{v(E)} \psi^\dagger(\vec{r}, \hat{\Omega}, E) d\hat{\Omega} dE dV \\
 & + \iiint \varphi(\vec{r}, \hat{\Omega}, E, t) \frac{1}{v(E)} \frac{\partial}{\partial t} P(t) \psi^\dagger(\vec{r}, \hat{\Omega}, E) d\hat{\Omega} dE dV. \quad (6.9)
 \end{aligned}$$

Usando la condición de restricción (6.5) el primer término del lado derecho desaparece ya que por la definición es una constante y la derivada de una constante es cero, por tanto se puede escribir

$$\begin{aligned}
 & \iiint \frac{1}{v(E)} \frac{\partial}{\partial t} (P(t) \varphi(\vec{r}, \hat{\Omega}, E, t)) \psi^\dagger(\vec{r}, \hat{\Omega}, E) d\hat{\Omega} dE dV = \\
 & \frac{\partial P(t)}{\partial t} \iiint \varphi(\vec{r}, \hat{\Omega}, E, t) \frac{1}{v(E)} \psi^\dagger(\vec{r}, \hat{\Omega}, E) d\hat{\Omega} dE dV \quad (6.10)
 \end{aligned}$$

En los términos de fuga se utiliza el teorema de la divergencia para cambiar integrales de volumen por integrales de superficie

$$\begin{aligned} \iiint_V \hat{\Omega} \cdot \nabla \left(P(t) \varphi(\vec{r}, \hat{\Omega}, E, t) \right) \psi^\dagger(\vec{r}, \hat{\Omega}, E) d\hat{\Omega} dE dV = \\ \iint_S \hat{n} \cdot \hat{\Omega} \left(P(t) \varphi(\vec{r}, \hat{\Omega}, E, t) \right) \psi^\dagger(\vec{r}, \hat{\Omega}, E) d\hat{\Omega} dE dA \end{aligned} \quad (6.11)$$

y también en el otro término.

$$\begin{aligned} \iiint_V \hat{\Omega} \cdot \nabla \psi^\dagger(\vec{r}, \hat{\Omega}, E) P(t) \varphi(\vec{r}, \hat{\Omega}, E, t) d\hat{\Omega} dE dV = \\ \iint_S \hat{n} \cdot \hat{\Omega} \psi^\dagger(\vec{r}, \hat{\Omega}, E) P(t) \varphi(\vec{r}, \hat{\Omega}, E, t) d\hat{\Omega} dE dA \end{aligned} \quad (6.12)$$

Si las condiciones de frontera para φ y ψ^\dagger , se suponen tal que $\varphi \psi^\dagger$ es cero sobre la superficie, lo que es un supuesto usual, entonces estos términos desaparecen.

En los términos de dispersión se puede reordenar intercambiando las variables de integración y combinándolas de la forma:

$$\begin{aligned} \iiint \psi^\dagger(\vec{r}, \hat{\Omega}, E) \int_{4\pi} d\hat{\Omega}' \int_0^\infty dE' \Sigma_s(\vec{r}, \hat{\Omega}' \rightarrow \hat{\Omega}, E' \rightarrow E, t) P(t) \varphi(\vec{r}, \hat{\Omega}', E', t) d\hat{\Omega} dE dV \\ - \iiint P(t) \varphi(\vec{r}, \hat{\Omega}, E, t) \int_{4\pi} d\hat{\Omega}' \int_0^\infty dE' \Sigma_s(\vec{r}, \hat{\Omega} \rightarrow \hat{\Omega}', E \rightarrow E', t) \psi^\dagger(\vec{r}, \hat{\Omega}', E) d\hat{\Omega} dE dV = \\ P(t) \iiint \iiint \psi^\dagger(\vec{r}, \hat{\Omega}, E) \left[\Sigma_s(\vec{r}, \hat{\Omega}' \rightarrow \hat{\Omega}, E' \rightarrow E, t) - \Sigma_s(\vec{r}, \hat{\Omega} \rightarrow \hat{\Omega}', E \rightarrow E', t) \right] \\ \varphi(\vec{r}, \hat{\Omega}', E', t) d\hat{\Omega}' dE' d\hat{\Omega} dE dV \end{aligned} \quad (6.13)$$

Si ahora se supone que el espectro de energía total de neutrones inmediatos es idéntico al espectro de energía de neutrones $\chi = \chi_p$, los términos de fisión pueden ser combinados (menos el término β) y reescritos de la forma como:

$$\begin{aligned}
 & \iiint \psi^\dagger(\vec{r}, \hat{\Omega}, E) \chi_p(E) \int_{4\pi} d\hat{\Omega}' \int_0^\infty dE' \nu \Sigma_f(\vec{r}, E', t) P(t) \varphi(\vec{r}, \hat{\Omega}', E') d\hat{\Omega} dE dV - \\
 & \iiint P(t) \varphi(\vec{r}, \hat{\Omega}, E, t) \nu \Sigma_f(\vec{r}, E') \int_{4\pi} d\hat{\Omega}' \int_0^\infty dE' \chi(E') \psi^\dagger(\vec{r}, \hat{\Omega}, E) d\hat{\Omega} dE dV = \\
 & P(t) \iiint \iiint \psi^\dagger(\vec{r}, \hat{\Omega}, E) \chi_p(E) [\nu \Sigma_f(\vec{r}, E', t) - \nu \Sigma_f(\vec{r}, E')] \varphi(\vec{r}, \hat{\Omega}', E') d\hat{\Omega}' dE' d\hat{\Omega} dE dV \quad (6.14)
 \end{aligned}$$

El término de fisión que contiene β también puede escribirse de la forma

$$\begin{aligned}
 & - \iiint \psi^\dagger(\vec{r}, \hat{\Omega}, E) \chi_p(E) \beta \int_{4\pi} d\hat{\Omega}' \int_0^\infty dE' \nu \Sigma_f(\vec{r}, E', t) P(t) \varphi(\vec{r}, \hat{\Omega}', E') d\hat{\Omega} dE dV \\
 & = -P(t) \iiint \iiint \psi^\dagger(\vec{r}, \hat{\Omega}, E) \chi_p(E) \left(\sum_i \beta_i \right) \nu \Sigma_f(\vec{r}, E', t) \varphi(\vec{r}, \hat{\Omega}', E') d\hat{\Omega}' dE' d\hat{\Omega} dE dV \quad (6.15)
 \end{aligned}$$

En el caso de los términos de la sección macroscópica total solo se agruparon los términos.

Finalmente se sustituyen estas expresiones en la ecuación (6.8) integrada sobre todo el espacio fase para obtener

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial P(t)}{\partial t} \iiint \varphi(\vec{r}, \hat{\Omega}, E, t) \frac{1}{v(E)} \psi^\dagger(\vec{r}, \hat{\Omega}, E, t) d\hat{\Omega} dE dV = \\
 & -P(t) \iiint \psi^\dagger(\vec{r}, \hat{\Omega}, E) [\Sigma_t(\vec{r}, E, t) - \Sigma_t(\vec{r}, E)] \varphi(\vec{r}, \hat{\Omega}, E, t) d\hat{\Omega} dE dV \\
 & +P(t) \iiint \iiint \psi^\dagger(\vec{r}, \hat{\Omega}, E) [\Sigma_s(\vec{r}, \hat{\Omega}' \rightarrow \hat{\Omega}, E' \rightarrow E, t) - \Sigma_s(\vec{r}, \hat{\Omega}' \rightarrow \hat{\Omega}, E \rightarrow E')] \varphi(\vec{r}, \hat{\Omega}', E') d\hat{\Omega}' dE' d\hat{\Omega} dE dV \\
 & +P(t) \iiint \iiint \psi^\dagger(\vec{r}, \hat{\Omega}, E) \chi_p(E) (\nu \Sigma_f(\vec{r}, E', t) - \nu \Sigma_f(\vec{r}, E')) \varphi(\vec{r}, \hat{\Omega}', E') d\hat{\Omega}' dE' d\hat{\Omega} dE dV \\
 & -P(t) \iiint \iiint \psi^\dagger(\vec{r}, \hat{\Omega}, E) \chi_p(E) \left(\sum_i \beta_i \right) \nu \Sigma_f(\vec{r}, E', t) \varphi(\vec{r}, \hat{\Omega}', E') d\hat{\Omega}' dE' d\hat{\Omega} dE dV \\
 & + \iiint \psi^\dagger(\vec{r}, \hat{\Omega}, E) \chi_d(E) \sum_i \lambda_i C_i(\vec{r}, t) d\hat{\Omega} dE dV \quad (6.16)
 \end{aligned}$$

Esta ecuación se puede simplificar empleando las siguientes definiciones.

$$A = \iiint \varphi(\vec{r}, \hat{\Omega}, E, t) \frac{1}{v(E)} \psi^\dagger(\vec{r}, \hat{\Omega}, E) d\hat{\Omega} dE dV \quad (6.17)$$

$$\begin{aligned} B = & - \iiint \psi^\dagger(\vec{r}, \hat{\Omega}, E) [\Sigma_i(\vec{r}, E, t) - \Sigma_i(\vec{r}, E)] \varphi(\vec{r}, \hat{\Omega}, E, t) \\ & + \iiint \iiint \psi^\dagger(\vec{r}, \hat{\Omega}, E) \left[\Sigma_s(\vec{r}, \hat{\Omega}' \rightarrow \hat{\Omega}, E' \rightarrow E, t) - \Sigma_s(\vec{r}, \hat{\Omega}' \rightarrow \hat{\Omega}, E \rightarrow E') \right] \cdot \\ & \quad \varphi(\vec{r}, \hat{\Omega}', E', t) d\hat{\Omega}' dE' d\hat{\Omega} dE dV \\ & + \iiint \iiint \psi^\dagger(\vec{r}, \hat{\Omega}, E) \chi_p(E) (v\Sigma_f(\vec{r}, E', t) - v\Sigma_f(\vec{r}, E')) \cdot \\ & \quad \varphi(\vec{r}, \hat{\Omega}', E', t) d\hat{\Omega}' dE' d\hat{\Omega} dE dV \end{aligned} \quad (6.18)$$

$$C = \iiint \iiint \psi^\dagger(\vec{r}, \hat{\Omega}, E) \chi_p(E) \left(\sum_i \beta_i \right) v\Sigma_f(\vec{r}, E', t) \varphi(\vec{r}, \hat{\Omega}', E', t) d\hat{\Omega}' dE' d\hat{\Omega} dE dV \quad (6.19)$$

Combinando estas ecuaciones se puede reescribir de la siguiente manera

$$\frac{\partial P(t)}{\partial t} = \frac{B-C}{A} P(t) + \frac{1}{A} \iiint \psi^\dagger(\vec{r}, \hat{\Omega}, E) \chi_d(E) \sum_i \lambda_i C_i(\vec{r}, t) d\hat{\Omega} dE dV \quad (6.20)$$

Después, se introduce un factor de normalización $F(t)$ en los parámetros de la ecuación de cinética puntual, esto para darles una interpretación física a ellos. Hay que enfatizar que este factor de normalización no tiene ningún efecto en la solución de la ecuación ya que se cancela el numerador y denominador de cada término. Bell & Glasstone ^[6] sugieren que la normalización más conveniente es el factor:

$$F(t) = \iiint \iiint \psi^\dagger(\vec{r}, \hat{\Omega}, E) \chi_p(E) v\Sigma_f(\vec{r}, E', t) \varphi(\vec{r}, \hat{\Omega}', E', t) d\hat{\Omega}' dE' d\hat{\Omega} dE dV \quad (6.21)$$

Usando este factor de normalización la ecuación de amplitud puede ser reescrita de la siguiente manera

$$\frac{\partial P(t)}{\partial t} = \frac{\rho(t) - \beta_{eff}(t)}{\Lambda(t)} P(t) + \sum_i \lambda_i C_i(t) \quad (6.22)$$

con las siguientes definiciones de los parámetros cinéticos:

$$\begin{aligned}
 \rho(t) = & -\frac{1}{F(t)} \iiint \psi^\dagger(\vec{r}, \hat{\Omega}, E) [\Sigma_t(\vec{r}, E, t) - \Sigma_t(\vec{r}, E)] \varphi(\vec{r}, \hat{\Omega}, E, t) d\hat{\Omega} dE dV \\
 & + \frac{1}{F(t)} \iiint \iiint \psi^\dagger(\vec{r}, \hat{\Omega}, E) [\Sigma_s(\vec{r}, \hat{\Omega} \rightarrow \hat{\Omega}', E' \rightarrow E, t) - \Sigma_s(\vec{r}, \hat{\Omega} \rightarrow \hat{\Omega}', E \rightarrow E')] \cdot \\
 & \quad \varphi(\vec{r}, \hat{\Omega}', E', t) d\hat{\Omega}' dE' d\hat{\Omega} dE dV \\
 & + \frac{1}{F(t)} \iiint \iiint \psi^\dagger(\vec{r}, \hat{\Omega}, E) \chi_p(E) [\nu \Sigma_f(\vec{r}, E', t) - \nu \Sigma_f(\vec{r}, E')] \cdot \\
 & \quad \varphi(\vec{r}, \hat{\Omega}', E', t) d\hat{\Omega}' dE' d\hat{\Omega} dE dV
 \end{aligned} \tag{6.23}$$

$$\begin{aligned}
 \beta_{effi}(t) = & \frac{1}{F(t)} \iiint \iiint \psi^\dagger(\vec{r}, \hat{\Omega}, E) \chi_d(E) \beta_i \nu \Sigma_f(\vec{r}, E', t) \cdot \\
 & \quad \varphi(\vec{r}, \hat{\Omega}', E', t) d\hat{\Omega}' dE' d\hat{\Omega} dE dV
 \end{aligned} \tag{6.24}$$

$$\beta_{eff}(t) = \sum_i \beta_{effi}(t) \tag{6.25}$$

$$\Lambda(t) = \frac{1}{F(t)} \iiint \psi^\dagger(\vec{r}, \hat{\Omega}, E) \frac{1}{v} \varphi(\vec{r}, \hat{\Omega}, E, t) d\hat{\Omega} dE dV \tag{6.26}$$

$$C_i(t) = \frac{1}{F(t) \Lambda(t)} \iiint \psi^\dagger(\vec{r}, \hat{\Omega}, E) C_i(\vec{r}, t) \chi_d(E) d\hat{\Omega} dE dV. \tag{6.27}$$

$$i = 1, \dots, I$$

Ahora bien, para completar la ecuación de amplitud falta agregar las ecuaciones de precursores de neutrones retardados y éstas son obtenidas multiplicando la ecuación (6.2) por $\psi^\dagger \chi_d$ y usando la condición de separabilidad con lo que se obtiene la siguiente ecuación para cada concentración de precursores.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} \left(\psi^\dagger(\vec{r}, \hat{\Omega}, E) \chi_d(E) C_i(\vec{r}, t) \right) + \lambda_i C_i(\vec{r}, t) \psi^\dagger(\vec{r}, \hat{\Omega}, E) \chi_d(E) = \\
 \beta_i \int_0^\infty dE' \int_{4\pi} \psi^\dagger(\vec{r}, \hat{\Omega}, E) \chi_d(E) \nu \Sigma_f(\vec{r}, E', t) P(t) \varphi(\vec{r}, \hat{\Omega}', E', t) d\hat{\Omega}' \\
 i = 1, \dots, I
 \end{aligned} \tag{6.28}$$

Se integra esta expresión sobre todo el espacio, energía y ángulo y se obtiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} & \iiint \frac{\partial}{\partial t} (\psi^\dagger(\vec{r}, \hat{\Omega}, E) \chi_d(E) C_i(\vec{r}, t)) d\hat{\Omega} dE dV \\ & + \iiint \chi_d(E) \lambda_i C_i(\vec{r}, t) \psi^\dagger(\vec{r}, \hat{\Omega}, E) d\hat{\Omega} dE dV = \\ & \iiint \iiint \psi^\dagger(\vec{r}, \hat{\Omega}, E) \chi_d(E) \beta_i \nu \Sigma_f(\vec{r}, E', t) P(t) \phi(\vec{r}, \hat{\Omega}', E', t) d\hat{\Omega}' dE' d\hat{\Omega} dE dV. \end{aligned} \quad (6.29)$$

Rearreglando la ecuación (6.27) y sustituyendo en la ecuación (6.29) se obtiene:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial C_i(t)}{\partial t} + \lambda_i C_i(t) = \\ & \frac{P(t)}{\Lambda(t)} \frac{1}{F(t)} \iiint \iiint \psi^\dagger(\vec{r}, \hat{\Omega}, E) \chi_d(E) \beta_i \nu \Sigma_f(\vec{r}, E', t) \phi(\vec{r}, \hat{\Omega}', E', t) d\hat{\Omega}' dE' d\hat{\Omega} dE dV \end{aligned} \quad (6.30)$$

$i = 1, \dots, I.$

Usando el parámetro de la definición de $\beta_{effi}(t)$ en la ecuación (6.24) se puede escribir como:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial C_i(t)}{\partial t} + \lambda_i C_i(t) = \frac{\beta_{effi}(t)}{\Lambda(t)} P(t) \\ & i = 1, \dots, I \end{aligned} \quad (6.31)$$

y se puede notar que las ecuaciones de amplitud son las ecuaciones de la cinética puntual.

Finalmente falta obtener la ecuación de forma que se obtiene sustituyendo la condición de separabilidad dentro la ecuación de transporte dependiente del tiempo y dividiendo por $P(t)$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\nu(E)} \frac{1}{P(t)} \frac{\partial P(t)}{\partial t} \phi(\vec{r}, \hat{\Omega}, E, t) + \frac{1}{\nu(E)} \frac{\partial \phi(\vec{r}, \hat{\Omega}, E, t)}{\partial t} + \hat{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \phi(\vec{r}, \hat{\Omega}, E, t) \\ & + \Sigma_t(\vec{r}, E, t) \phi(\vec{r}, \hat{\Omega}, E, t) = \int_{4\pi} d\hat{\Omega}' \int_0^\infty dE' \Sigma_s(\vec{r}, \hat{\Omega}' \rightarrow \hat{\Omega}, E' \rightarrow E, t) \phi(\vec{r}, \hat{\Omega}', E', t) + \\ & (1 - \beta) \chi_p(E) \int_{4\pi} d\hat{\Omega}' \int_0^\infty dE' \nu \Sigma_f(\vec{r}, E', t) \phi(\vec{r}, \hat{\Omega}', E', t) + \frac{\chi_d(E)}{P(t)} \sum_{i=1}^I \lambda_i C_i(\vec{r}, t). \end{aligned} \quad (6.32)$$

$i = 1, \dots, I$

Capítulo 6

El método cuasi-estático original utiliza

$$\frac{\partial \varphi(\vec{r}, \hat{\Omega}, E, t)}{\partial t} = 0 \quad (6.33)$$

En método cuasi-estático mejorado, que es el aplicado en este trabajo, utiliza para aproximar la derivada en tiempo del flujo angular el método de diferencias divididas hacia atrás

$$\frac{\partial \varphi(\vec{r}, \hat{\Omega}, E, t)}{\partial t} = \frac{\varphi(\vec{r}, \hat{\Omega}, E, t) - \varphi(\vec{r}, \hat{\Omega}, E, -\Delta t)}{\Delta t} \quad (6.34)$$

Si se reacomoda la ecuación finalmente quedaría de la forma:

$$\begin{aligned} \frac{1}{v(E)} \left(\frac{1}{P(t)} \frac{\partial P(t)}{\partial t} + \frac{1}{\Delta t} \right) \varphi(\vec{r}, \hat{\Omega}, E, t) + \hat{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \varphi(\vec{r}, \hat{\Omega}, E, t) + \Sigma_t(\vec{r}, E, t) \varphi(\vec{r}, \hat{\Omega}, E, t) = \\ \int_{4\pi} d\hat{\Omega}' \int_0^\infty dE' \Sigma_s(\vec{r}, \hat{\Omega}' \rightarrow \hat{\Omega}, E' \rightarrow E, t) \varphi(\vec{r}, \hat{\Omega}', E', t) + \\ + (1 - \beta) \chi_p(E) \int_{4\pi} d\hat{\Omega}' \int_0^\infty dE' \nu \Sigma_f(\vec{r}, E', t) \varphi(\vec{r}, \hat{\Omega}', E', t) + \\ + \frac{\chi_d(E)}{P(t)} \sum_{i=1}^I \lambda_i C_i(\vec{r}, t) + \frac{\varphi(\vec{r}, \hat{\Omega}, E, t - \Delta t)}{v(E) \Delta t} \end{aligned} \quad (6.35)$$

Al realizar todo este procedimiento, se obtiene que la condición de normalización se calcula con (6.5), la ecuación de forma está dada por (6.35) y la ecuación de amplitud se obtienen con (6.22) y (6.31), esto se puede implementar en AZTRAN modificando las subrutinas que resuelve la ecuación dependiente del tiempo en forma directa.

6.3 Algoritmo de la aproximación cuasi-estática mejorada

La ecuación de forma, las ecuaciones de cinética puntual, la constante de normalización y las definiciones de productos internos dadas por las ecuaciones (6.23) hasta (6.27), son resueltas numéricamente usando una jerarquía en los diferentes intervalos que se muestran en la figura:

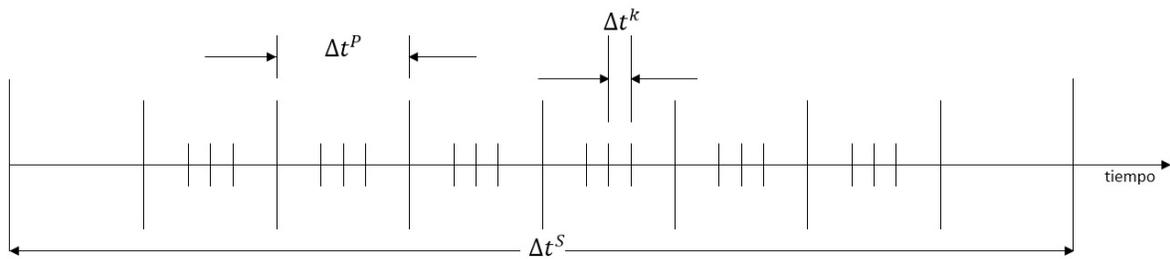


Figura 6.1 Representación de los intervalos de tiempo.

En la **Figura 6.1** se muestran los intervalos donde se resuelven las ecuaciones de transporte donde Δt^S es el intervalo de todo el transitorio, Δt^P son los intervalos de los macro-pasos donde se resuelve la ecuación de forma y finalmente Δt^k son los micro pasos donde se resuelven las ecuaciones de cinética puntual y se obtiene la amplitud.

Se supone que la función de forma varía linealmente sobre el intervalo más grande, la reactividad, fracción de neutrones retardados y el tiempo de generación serán calculados en el intervalo Δt^P con interpolaciones lineales sobre la forma de los flujos, finalmente el intervalo Δt^k se usa para resolver las ecuaciones de la cinética puntual así como la concentración de precursores de neutrones retardados.

Capítulo 6

En general la descripción del algoritmo de la aproximación cuasi-estática es la siguiente:

1. Al principio los parámetros cinéticos definidos por (6.23) hasta (6.27) se evalúan a través del intervalo Δt suponiendo que la función forma no se modifica a partir del estado estacionario, una vez que los parámetros son conocidos, se resuelven las ecuaciones de cinética puntual y se obtiene la amplitud.
2. Conociendo la amplitud al tiempo Δt se resuelve la ecuación correspondiente a la función de forma.
3. Se calcula el error de normalización donde se evalúa la función de forma.

$$\varepsilon_{\psi} = \frac{\left| \left\langle \psi^{\dagger}, \frac{1}{v} \varphi(\bar{r}, \hat{\Omega}, E, t) \right\rangle - C \right|}{C} \quad (6.36)$$

4. La función de forma es entonces normalizada con C y se usa para una nueva estimación para obtener los parámetros cinéticos al final del macro-paso de tiempo.
5. La introducción de la actualización de los parámetros cinéticos dentro de las ecuaciones de la cinética puntual permite actualizar el valor de la amplitud al tiempo Δt que será introducido en la ecuación de forma.
6. Los pasos 2-4 se iteran hasta que se satisfaga el criterio de convergencia del factor ε_{ψ} .

Se aplica el procedimiento sucesivamente hasta completar todos los macro-pasos de tiempo hasta el final del transitorio.

En la **Figura 6.2** se muestra un diagrama de flujo del algoritmo de solución.

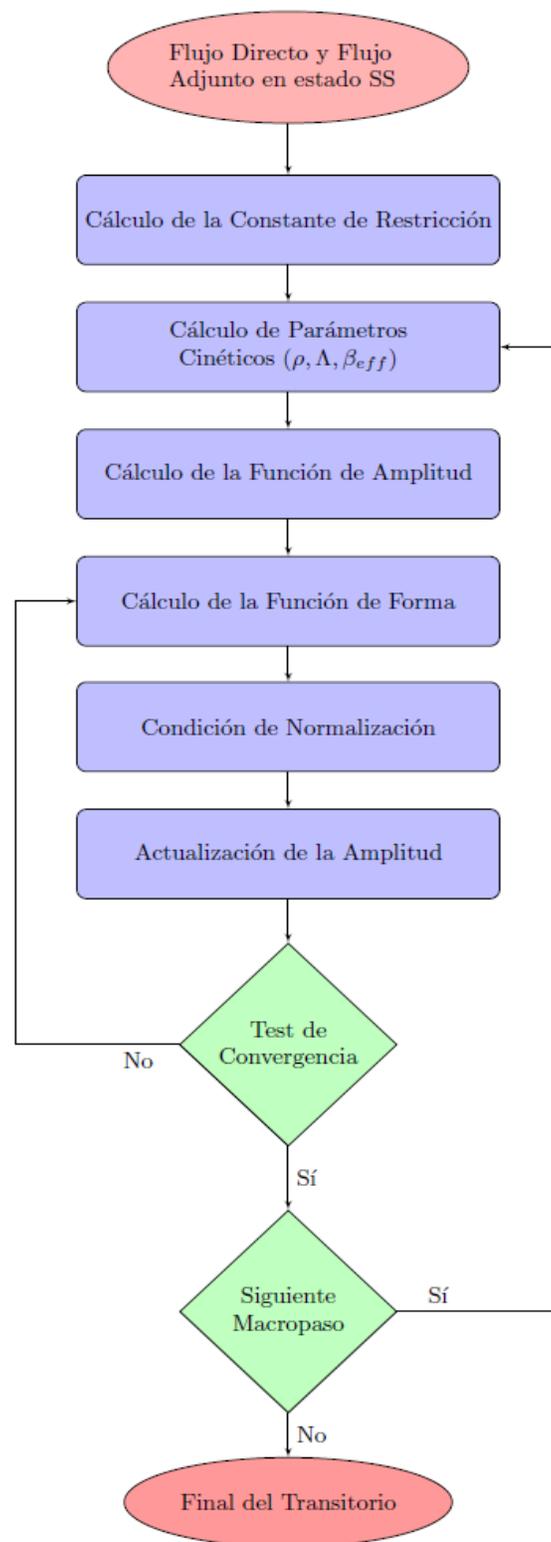


Figura 6.2 Diagrama de flujo del algoritmo de la aproximación cuasi-estática mejorada.

Capítulo 7

Descripción del Código AZTRAN

7.1 Introducción

En este capítulo se describen las subrutinas del programa AZTRAN que resuelven la ecuación de transporte dependiente del tiempo en geometría XYZ y en presencia de precursores de neutrones retardados usando todas las implementaciones descritas en los capítulos anteriores. Estas subrutinas están escritas en el lenguaje de programación FORTRAN 95 que facilita que los vectores y matrices tengan asignación de memoria dinámica, esto quiere decir que podemos dimensionar los arreglos durante la ejecución del programa, también cuenta con la aplicación de módulos que admite entre otras cosas la declaración de variables globales, todas estas son mejoras respecto al FORTRAN 77 que permiten mejorar la eficiencia en la programación.

7.2 Algoritmo de solución

El algoritmo de solución empleado para resolver las ecuaciones de transporte de forma directa es el siguiente:

- a) Dado un dominio cartesiano en tres dimensiones, éste se divide en celdas superponiendo una malla regular en él, si el dominio consiste de materiales diferentes, se debe tener cuidado en hacer que coincidan las líneas de discretización espacial de la malla con cada una de las interfaces que separa a los materiales.
- b) Se especifica el número de materiales, el número de grupos de energía, el número de elementos barra, los números de puntos malla en las direcciones en X, en Y, en Z, las condiciones de frontera y el orden de la aproximación de ordenadas discretas.
- c) Se proporcionan las secciones eficaces de los materiales por grupo de energía que identifican los diferentes materiales del dominio.
- d) Dados estos parámetros se calculan o se leen los flujos críticos del estado estacionario que a partir de ellos se realiza el cálculo del transitorio.
- e) Se leen velocidades de los neutrones, β , λ y la definición del cambio en las secciones eficaces para poder realizar el cálculo del transitorio, donde se incluyen también los pasos de tiempo y la tolerancia (EPSXT) del problema.
- f) Con los flujos críticos del estado estacionario se calculan las concentraciones de precursores iniciales.

Capítulo 7

A partir de éstos se realizan los siguientes pasos en cada paso de tiempo:

- g) Se calculan los momentos de la fuente al tiempo t_{k+1} para cada celda y grupo.
- h) Después se resuelve el flujo angular al tiempo t_{k+1} para cada celda y grupo resolviendo el sistema de ecuaciones dados en la ecuación (5.14).
- i) Se calcula la diferencia máxima relativa (EMAX) entre las dos aproximaciones sucesivas del flujo angular.
- j) Se inicializa el flujo angular para la próxima iteración interna.
- k) Si la diferencia máxima relativa (EMAX) es mayor que la tolerancia deseada el proceso se repite desde g) hasta j) y todo se realiza hasta que ésta sea menor que la tolerancia.
- l) Si se cumple la tolerancia deseada entonces se calcula la concentración de precursores al tiempo t_{k+1} y se inicializan los precursores para el próximo paso de tiempo.
- m) Se realiza el cálculo para el siguiente paso de tiempo usando los g) hasta m) hasta que se cumplan todos los pasos de tiempo.
- n) Finalmente se imprimen las potencias radiales y axiales del transitorio y se imprimen los flujos angulares a determinados pasos de tiempo.

El siguiente diagrama de flujo se describe el proceso del algoritmo de AZTRAN con el cual se resuelve la ecuación de transporte de forma directa ver (**Figura 7.1**) y en la **Sección 7.3** se describen las subrutinas que la conforman.

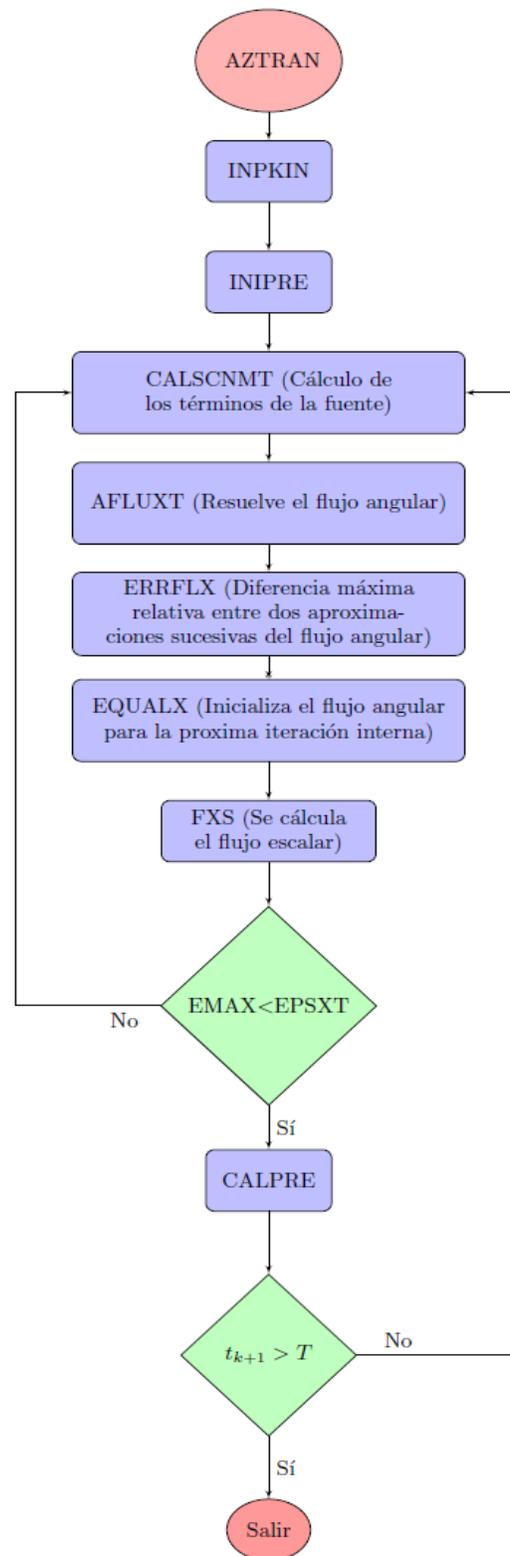


Figura 7.1 Diagrama de flujo del algoritmo de AZTRAN (directo).

Capítulo 7

El algoritmo de solución empleado para resolver las ecuaciones de transporte usando la aproximación cuasi-estática mejorada es el siguiente:

- a) Dado un dominio cartesiano en tres dimensiones, éste se divide en celdas superponiendo una malla regular en él, si el dominio consiste de materiales diferentes, se debe tener cuidado en hacer que coincidan las líneas de discretización espacial de la malla con cada una de las interfaces que separa a los materiales.
- b) Se especifica el número de materiales, el número de grupos de energía, el número de elementos barra, los números de puntos malla en las direcciones en X, en Y, en Z, las condiciones de frontera y el orden de la aproximación de ordenadas discretas.
- c) Se proporcionan las secciones eficaces de los materiales por grupo de energía que identifican los diferentes materiales del dominio.
- d) Dados estos parámetros se calculan o se leen los flujos críticos del estado estacionario que a partir de ellos se realiza el cálculo del transitorio.
- e) Se leen velocidades de los neutrones, β , λ , tolerancia (EPSXT) y la definición del cambio en las secciones eficaces para poder realizar el cálculo del transitorio, donde se especifican los macro-pasos, después éstos se dividen para formar micro-pasos de tiempo.
- f) Con los flujos críticos del estado estacionario se calculan las concentraciones de precursores iniciales.
- g) Se calcula la constante de restricción C , que no varía a lo largo del transitorio.

A partir de éstos se realizan los siguientes pasos en cada paso de tiempo:

- h) Se calculan los parámetros cinéticos ($\rho(t_k)$, $\Lambda(t_k)$, $\beta_{eff}(t_k)$) al tiempo t_k .
- i) Se supone que la función de forma no varía del tiempo t_k lo que permite obtener los parámetros cinéticos al tiempo t_{k+1} .
- j) Con la obtención de los parámetros cinéticos en el intervalo Δt , se resuelven las ecuaciones de la cinética puntual usando el micro-paso de tiempo, obteniéndose la amplitud y la derivada de la amplitud.
- k) Se calculan los momentos de la fuente al tiempo t_{k+1} .
- l) Después se resuelve la función de forma al tiempo t_{k+1} .

- m) Se calcula la constante de normalización y con ésta se divide al flujo obtenido.
- n) Con este flujo nuevo se calculan los parámetros cinéticos al tiempo t_{k+1} .
- o) Se actualiza la amplitud con esta nueva información para ser usada en el siguiente macro-paso.
- p) Si la diferencia máxima relativa no satisface la tolerancia deseada el proceso es repetido desde h) hasta el o) o hasta que ésta sea menor que la tolerancia.
- q) Si se cumple la tolerancia deseada se calculan las concentraciones de precursores al tiempo t_{k+1} y se inicializan los precursores para el próximo paso de tiempo.
- n) Este proceso se vuelve a realizar para cada macro-paso hasta el final del transitorio.

El la **Figura 7.2** se muestra el diagrama de flujo que describe el proceso del algoritmo de AZTRAN resolviendo la ecuación de transporte usando la aproximación cuasi-estática mejorada.

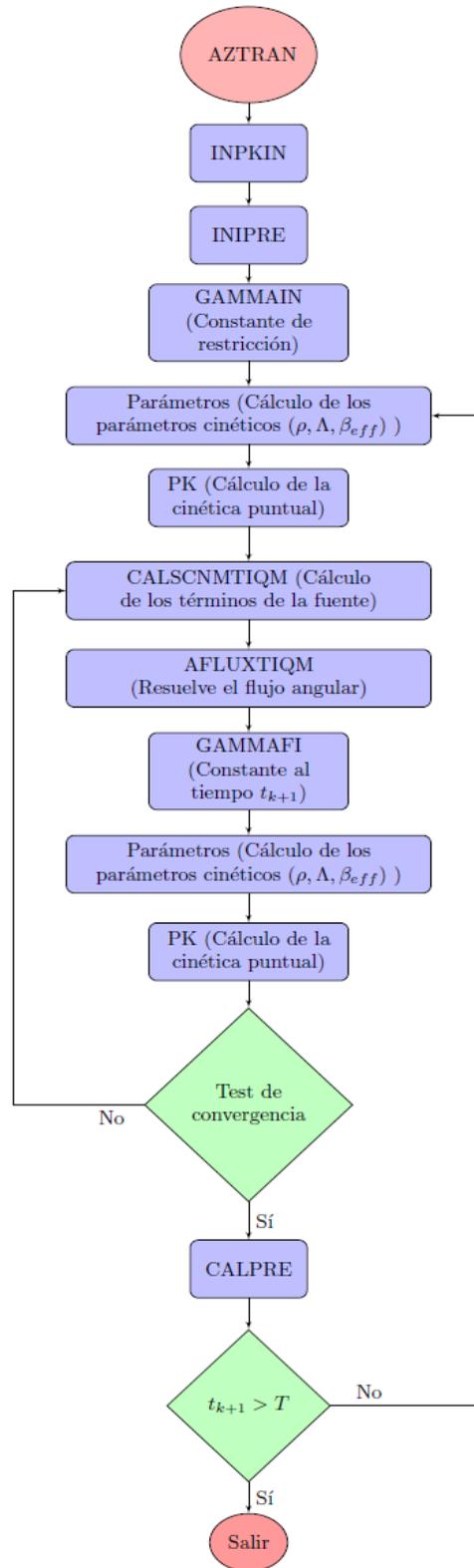


Figura 7.2 Diagrama de flujo del algoritmo de AZTRAN (IQM).

7.3 Descripción de las subrutinas del código AZTRAN

AFLUXT: Calcula el flujo angular de neutrones en cada celda, por grupo, dirección angular y paso de tiempo.

AFLUXTIQM: Calcula el flujo angular de neutrones en cada celda, por grupo, dirección angular y paso de tiempo usando la IQM.

ALLOC_ALL: Asignación de memoria a los vectores y matrices para las secciones eficaces y definiciones geométricas.

ALLOC_WORK_VECTORS: Asignación de memoria a todos los vectores de trabajo.

CALPRE: Actualiza la concentración de precursores de neutrones retardados a cada paso de tiempo.

CALSCNMT: Calcula los momentos de los términos de fuente 000, 100, 010 y 001 para cada celda, grupo y paso de tiempo.

CALSCNMTIQM: Calcula los momentos de términos de fuente 000, 100, 010 y 001 para cada celda, grupo y paso de tiempo usando la IQM.

CDF: Aplica las condiciones de frontera.

CPAR: Determinación del número de incógnitas por grupo de energía para los momentos de flujo de neutrones en celda.

DATE_TIME: Imprime la fecha, tiempo y el título.

DMXYZ: Lee la malla gruesa que define la distribución de materiales en el medio.

EQUALP: Permite inicializar la concentración de precursores de la nueva iteración con el de la iteración anterior al vaciar el contenido del arreglo antiguo en el nuevo.

EQUALX: Permite inicializar el flujo angular de la nueva iteración con el de la iteración anterior al vaciar el contenido del arreglo antiguo en el nuevo.

ERRFLX: Calcula la diferencia máxima relativa entre dos aproximaciones sucesivas del momento cero del flujo angular en las caras y celdas.

FLUXD: Hace el cálculo del flujo directo en estado estacionario.

Capítulo 7

FLUXA: Realiza el cálculo del flujo adjunto en estado estacionario.

FLUXT: Realiza el cálculo del flujo directo dependiente del tiempo.

FLUXTIQM: Realiza el cálculo del flujo dependiente del tiempo usando IQM.

FXS: Calcula los momentos correspondientes al flujo escalar a partir de los correspondientes momentos del flujo angular.

GAMMAIN: Calcula la constante de restricción C .

GAMMAFI: Calcula la constante de restricción final en cada test de convergencia.

GMXYZ: Genera la malla de discretización espacial en las direcciones X, Y, Z utilizando la información leída desde DMXYZ.

INIPRE: Calcula la concentración inicial de precursores de neutrones retardados.

INPKIN: Lee los datos de entrada de la parte cinética y las tolerancias para los criterios de convergencia de la parte dependiente del tiempo.

LGN: Lee los parámetros geométricos.

LSODE: Resuelve el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias^[27].

LXS: Lee las secciones eficaces de los materiales y los criterios de convergencia del estado estacionario.

NORM: Normaliza los flujos angulares entre la constante de normalización.

PARAMETROF: Realiza el cálculo de la constante de normalización para los parámetros cinéticos.

PARAMETROLM: Realiza el cálculo del tiempo de generación de neutrones.

PARAMETROB: Realiza el cálculo de beta efectiva.

PARAMETRORHO: Realiza el cálculo de la reactividad.

PK: Resuelve las ecuaciones de cinética puntual.

SNDATA_EQN: Proporciona las direcciones angulares y pesos asociados a la aproximación seleccionada.

SOLFLXT: Resuelve para una celda, un grupo, una dirección angular y paso de tiempo dados, los momentos del flujo angular en las caras y en la celda.

SOLFLXTIQM: Resuelve para una celda, un grupo, una dirección angular y paso de tiempo dados, los momentos del flujo angular en las caras y en la celda usada para la IQM.

WAZTRAN: Imprime el encabezado del problema.

WSNDAT: Se imprimen las direcciones angulares del problema.

7.4 Descripción de las funciones

RRX: Calcula la tasa de producción de neutrones de fisión.

RRXT: Calcula la tasa de producción de neutrones de fisión en cada paso de tiempo.

REACTT: Esta función se utiliza para modificar la sección eficaz macroscópica total en el grupo de energía que se indique.

REACTS: Esta función se utiliza para modificar la sección eficaz macroscópica de dispersión en el grupo de energía que se indique.

REACTF: Esta función se utiliza para modificar la sección eficaz macroscópica de fisión en el grupo de energía que se indique.

RHO: Esta función interpola la reactividad en el intervalo Δt para ser usado por PK.

LM: Esta función interpola el tiempo de generación de neutrones en el intervalo Δt para ser usado por PK.

BEFF: Esta función interpola la fracción de neutrones retardados efectiva en el intervalo Δt para ser usado por PK.

7.5 Descripción de los datos de entrada cinéticos

En esta sección se muestran solo los datos cinéticos que son introducidos para reproducir un transitorio, los datos del estado estacionario se muestran en el input completo en el anexo A y se describen con detalle en el manual de usuario del código AZTRAN ^[4].

Capítulo 7

Los siguientes datos de entrada son los siguientes:

Estos datos van en la primera línea

NPC (Variable entera).

Número de grupos de precursores.

NPMT (Variable entera).

Discretización temporal.

NTBT (Variable entera).

Número total de barras perturbadas.

REG_BALT (Variable entera).

0 si está desactivado el rebalance en tiempo o 1 si está activado.

MODE_TIME (Variable entera).

0 si se resuelve el problema de forma directa o 1 si se usa el algoritmo IQM.

En la siguiente línea se introducen los datos cinéticos:

NPERT (Variable entera).

Número total de tipos de perturbación para la sección macroscópica total.

NPERS (Variable entera).

Número total de tipos de perturbación para la sección macroscópica de dispersión.

NPERT (Variable entera).

Número total de tipos de perturbación para la sección macroscópica de fisión.

MT (J), J=1,..., NPMT (Variable entera).

Número de intervalos en que se subdividirá la malla en tiempo.

MIQM (J), J=1,..., NPMT (Variable entera).

Número de intervalos en que se subdividirá la malla MT

IMPT (Variable entera).

Frecuencia de impresión de resultados.

TM (J), J=1,..., NPMT (Variable real).

Ordenadas que corresponden a las líneas principales de la discretización en tiempo.

P (5, N) (Arreglo de tipo real: 5 columnas, 7 renglones, N=1,...,7).

Son tres arreglos para cada perturbación de sección eficaz total, dispersión y fisión, éstas contienen la información de los parámetros que se usarán para modelar el tipo de cambio.

En total son 5 datos por cada tipo de cambio.

El más sencillo es la inserción tipo escalón o salto, en el cual P (1,1) significa la variación relativa entre los valores final e inicial de las secciones eficaces. P (5,1) es el tiempo de corte o suspensión del escalón regresándose al valor inicial de las secciones eficaces. Los valores para P (2,1), P (3,1) y P (4,1) no tienen significado para este tipo de cambio.

El siguiente tipo de cambio es la inserción en rampa o lineal para la cual P (1,2) significa nuevamente lo que P (1,1) y ahora P (2,2) corresponde a la pendiente de la recta. El tiempo en que la inserción deja de ser rampa para tomar el valor final que tenía la sección eficaz es P (2,5).

Tanto P (3,2) como P (4,2) no tienen significado para este tipo de cambio. En general, los tipos de inserción o de cambio son como se describen en las funciones REACTT, REACTS, REACTF para cada tipo de sección macroscópica que son resumidos:

donde Σ_R puede ser la sección macroscópica total o dispersión o de fisión

N=1 Cambio en escalón

$$\Sigma_R^- = \Sigma_R (1 - \Delta\alpha) \text{ (perturbación positiva)}$$

$$\Sigma_R^+ = \Sigma_R (1 + \Delta\alpha) \text{ (perturbación positiva)}$$

$$\text{para } T \in [0, T_t]$$

$$\Sigma_R = \Sigma_R \text{ para } T > T_t$$

donde T_t es el tiempo que dura la perturbación en el transitorio.

N=2 Cambio en rampa

$$\Sigma_R^+ = \Sigma_R - \alpha T \text{ (perturbación positiva) para } T \in [0, T_t]$$

$$\Sigma_R^+ = \Sigma_R - \alpha T_t \text{ para } T > T_t$$

$$\Sigma_R^- = \Sigma_R + \alpha T \text{ (perturbación negativa) para } T \in [0, T_t]$$

$$\Sigma_R^- = \Sigma_R + \alpha T_t \text{ para } T > T_t.$$

N=3 Cambio tipo cuadrática

$$\Sigma_R = \Sigma_R^0 (1 + \alpha T)^2 \text{ para } T \in [0, T_t]$$

$$\Sigma_R = \Sigma_R^0 (1 + \alpha T_t)^2 \text{ para } T > T_t.$$

N=4 Cambio tipo senoidal

$$\Sigma_R = \Sigma_R \text{sen}(\alpha T) \text{ para } T \in [0, T_t]$$

$$\Sigma_R = \Sigma_R \text{sen}(\alpha T_t) \text{ para } T > T_t.$$

Capítulo 7

N=5 Cambio tipo cosenoidal

$$\Sigma_R = \Sigma_R \cos(\alpha T) \text{ para } T \in [0, T_t]$$

$$\Sigma_R = \Sigma_R \cos(\alpha T_t) \text{ para } T > T_t.$$

N=6 Cambio tipo exponencial

$$\Sigma_R^- = \Sigma_R \exp(-\alpha T) \text{ (perturbación positiva) para } T \in [0, T_t]$$

$$\Sigma_R^- = \Sigma_R \exp(-\alpha T_t) \text{ para } T > T_t \text{ y } \alpha > 0$$

$$\Sigma_R^+ = \Sigma_R \exp(\alpha T) \text{ (perturbación negativa) para } T \in [0, T_t]$$

$$\Sigma_R^+ = \Sigma_R \exp(\alpha T_t) \text{ para } T > T_t \text{ y } \alpha > 0.$$

N=7 Cambio tipo exponencial Asintótica

$$\Sigma_R^- = \Sigma_R (1 - \exp(-\alpha T)) \text{ (perturbación positiva) para } T \in [0, T_t]$$

$$\Sigma_R^- = \Sigma_R (1 - \exp(-\alpha T_t)) \text{ para } T > T_t \text{ y } \alpha > 0$$

$$\Sigma_R^+ = \Sigma_R (1 - \exp(\alpha T)) \text{ (perturbación negativa) para } T \in [0, T_t]$$

$$\Sigma_R^+ = \Sigma_R (1 - \exp(\alpha T_t)) \text{ para } T > T_t \text{ y } \alpha > 0.$$

V (K), K=1,..., NGR (Variable real).

Velocidad característica de los neutrones del grupo K.

RL (I), I=1,..., NPC (Variable real).

Constante de decaimiento de los precursores del grupo I.

BL (I), I=1,..., NPC (Variable real).

Fracción de neutrones retardados producidos por el grupo I.

THETA_F (Variable real).

Valor de la theta de integración del flujo angular.

THETA_P (I), I=1,..., NPC (Variable real).

Valor de la theta de integración de los precursores.

ITR (K), K=1,..., NGR (Variable entera).

Indicador del grupo o grupos donde cambiarán las secciones eficaces.
Si $ITR(K)=1$, cambiarán las secciones eficaces correspondientes al grupo K.

IDT (1),..., IDT (5) (Arreglo entero).

Con este arreglo de datos se indica el tipo de cambio y la zona del reactor en cual ocurre. IDT (1) es el número que proporciona el tipo de cambio que se va emplear en la posición que se indique. IDT (2) e IDT (3) son las coordenadas de la cara izquierda y de la cara derecha que delimitan en la dirección X la zona donde se desea perturbar la secciones macroscópicas. En el eje Y, IDT (4) e IDT (5) delimitan esa zona.

Se leen estos arreglos en secuencia hasta encontrar un arreglo de cinco ceros para indicar que se ha concluido la descripción del patrón de posiciones perturbadas.

0, 0, 0, 0, 0 Ceros para leer otro tipo de datos.

NB (Variable entera).

Número que identifica los elementos barra perturbados con valores de 1 hasta NTBT.

IDT (1), IDT (2), IDT (3) (Arreglo entero).

Arreglo de números para indicar el tipo de reactividad y la zona axial en donde se da la perturbación. IDT (1) indica el tipo de perturbación. IDT (2) e IDT (3) delimitan la zona axial en la parte inferior y la parte superior, respectivamente.

0, 0,0 Ceros para leer otra barra perturbada.

0 Cero para leer otro tipo de datos.

NINTT (Variable entera).

Número máximo de iteraciones internas en cada paso de tiempo.

EPSXT (Variable real).

Tolerancia para el valor máximo permitido entre dos iteraciones sucesivas para el flujo de los neutrones promedio.

FIN DE DATOS DEL PROBLEMA.

En el siguiente capítulo se proporcionan los resultados numéricos obtenidos para los diversos problemas empleados para comprobar y ratificar la implementación en tiempo del código AZTRAN.

Capítulo 8

Descripción y Simulación de los Problemas de Referencia



8.1 Introducción

En este capítulo se describen cada uno de los problemas de referencia, mejor conocidos como problemas Benchmark, empleados para comprobar el adecuado funcionamiento de la nueva versión del programa AZTRAN, al cual se le agregó el cálculo dependiente del tiempo.

El primer problema de referencia corresponde a un reactor homogéneo e infinito, con condiciones de frontera de no fuga, con un grupo de energía y un grupo de precursores cuya solución analítica puede ser obtenida sin dificultad para un cambio en forma de escalón de las secciones eficaces.

El segundo problema es un reactor rápido unidimensional formado por varias regiones planas. Este problema tiene tres variantes que difieren en cuanto al grado de dificultad, emplea dos grupos de energía y seis de precursores de neutrones retardados.

El tercero corresponde al Benchmark TWIGL-2D que es un modelo bidimensional de un reactor nuclear de agua ligera con secciones eficaces típicas de este tipo de reactores, para dos grupos de energía y un grupo de precursores de neutrones retardados. En este caso el problema considera dos tipos de transitorios en los que la barra de control es extraída: a) en forma de escalón y b) en forma de rampa.

El cuarto y último problema corresponde al modelo de un reactor nuclear tridimensional, este es la extensión del problema bidimensional TWIGL-2D a tres dimensiones. Está definido como el problema bidimensional cambiando las secciones eficaces, manteniendo el mismo número de precursores, con el que se reproducen dos transitorios a) en forma de escalón y b) en forma de rampa.

Todos los resultados fueron obtenidos con una laptop equipada con un procesador Intel® Core™ i7-6500U CPU @ 2.50GHz y se compararon con las referencias obtenidas en la literatura. El criterio que se utilizó para comparar los resultados fue calculando un error absoluto en pcm (Per-Centil-Mil), el cual está definido por

$$pcm = \left(\frac{x_{ref} - x_{calc}}{x_{ref}} \right) \times 10^5 \quad (8.1)$$

donde

x_{ref} = valor de referencia

x_{calc} = valor calculado.

8.2 Descripción del problema 0D: caso estático y dependiente del tiempo

Este problema no es en realidad un Benchmark si no un “Toy Problem” como le designan con frecuencia en la literatura. El problema consiste en eliminar la dependencia espacial al considerar un núcleo homogéneo con características físicas conocidas y condiciones de frontera de no fuga lo cual permite obtener el factor de multiplicación infinito que para un grupo de energía está dado por $k_{\infty} = \nu \Sigma_f / \Sigma_a = \nu \Sigma_f / (\Sigma_t - \Sigma_s)$.

Si se consideran las secciones eficaces de la **Tabla 8.1** y una tolerancia de 10^{-8} para la k_{∞} y los flujos, se puede obtener el valor del factor de multiplicación infinito de $k_{\infty} = 1.0$, con este valor del factor de multiplicación, se dice que el núcleo está en estado crítico.

Si se considera ahora un transitorio en el que las secciones eficaces de la **Tabla 8.1** aumentan un 0.1%, tomando en cuenta los parámetros cinéticos propuestos en la misma tabla, es decir ν , β , λ , y además se considera una tolerancia de 10^{-6} para el flujo, la potencia normalizada se comporta tal y como se muestra en la **Figura 8.1**, donde el resultado analítico se compara con los resultados obtenidos con AZTRAN, usando para este último un paso de tiempo de 10^{-5} s de forma directa y la IQM.

Tabla 8.1 Parámetros para el problema 0D.

Parámetro	Σ_t (cm ⁻¹)	Σ_s (cm ⁻¹)	$\nu \Sigma_f$ (cm ⁻¹)	ν (cm/s)	β	λ (s ⁻¹)
Valor	0.1	0.05	0.05	1×10^6	0.0066	0.11

En la **Figura 8.1** se muestran los resultados numéricos obtenidos con AZTRAN de forma directa y usando IQM los cuales coinciden con la solución exacta que fue obtenida con Maple. El crecimiento de la potencia se debe a que la reactividad que se inserta en el transitorio es positiva. Sólo se muestran los resultados para la aproximación de ordenadas discretas S_2 , sin embargo la potencia sería la misma si se empleara otra aproximación S_n ya que en este problema el flujo de neutrones no depende del ángulo.

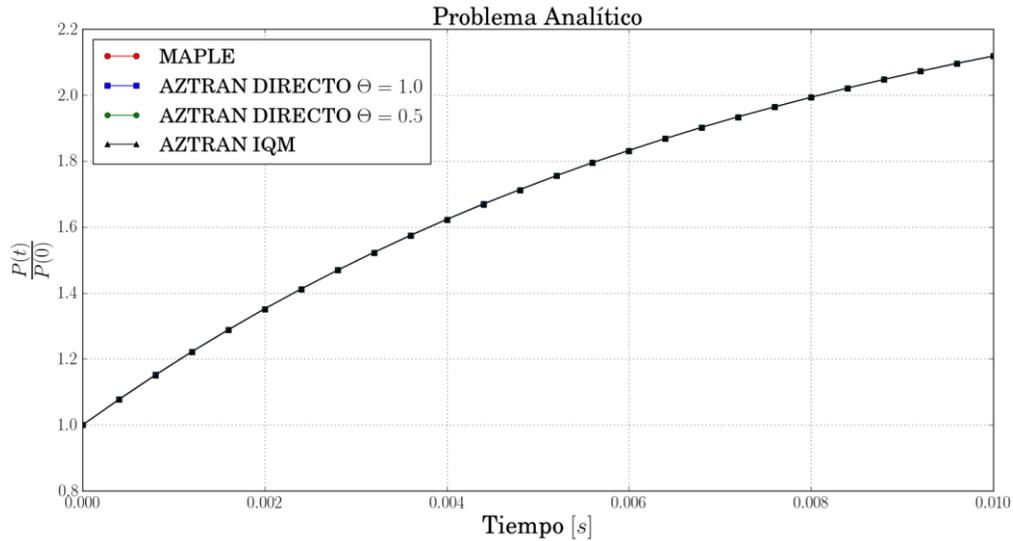


Figura 8.1 Potencia normalizada obtenida para un aumento del 0.1% en las secciones eficaces.

En la **Tabla 8.2** se muestran los tiempos de cómputo al resolver el problema analítico.

Tabla 8.2 Tiempos de cómputo para el problema analítico 0D.

AZTRAN $\theta=1.0$	AZTRAN $\theta=0.5$	AZTRAN IQM
204.5 s	130.3 s	178.8 s

En la **Tabla 8.2** se observa que usando la IQM se reduce el tiempo de cómputo respecto a $\theta=1.0$, pero no respecto a $\theta=0.5$, esto debido a que no se está usando la ventaja que se tiene al usar este algoritmo, ya que en este problema en particular la función de forma no cambia, por tanto se pueden usar pasos de tiempo más largos sin perder la precisión.

En la **Figura 8.2** se muestra la potencia normalizada del problema directo con $\theta=1.0$ comparado con la potencia normalizada usando IQM para diferentes pasos de tiempo y como se muestra usar pasos de tiempo más largos no influyó en la precisión de la solución, ya que la función de forma no cambia en todo el transitorio.

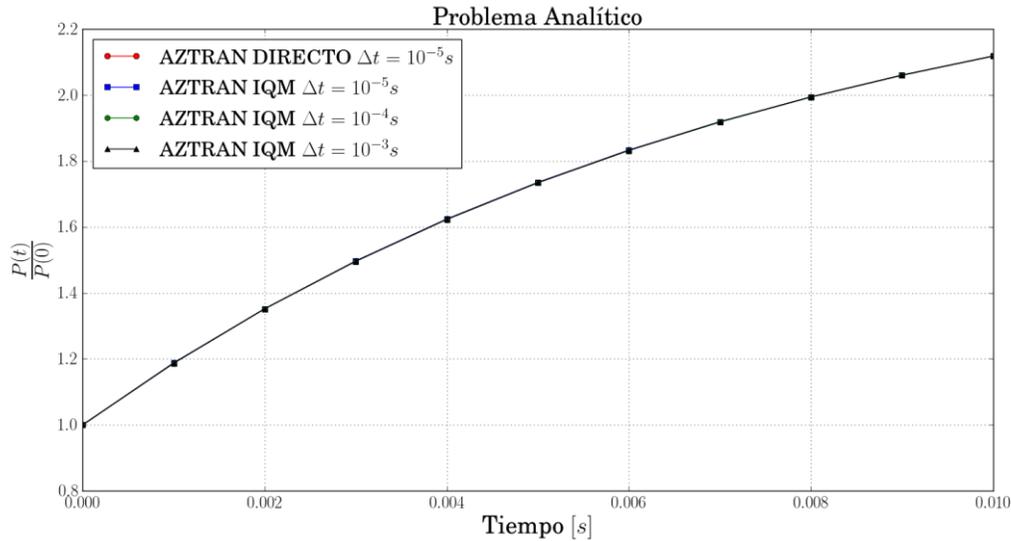


Figura 8.2 Potencia normalizada para el problema analítico para diferentes pasos de tiempo.

Tabla 8.3 Tiempos de cómputo problema analítico diferentes pasos de tiempo.

$\theta = 1.0 \quad \Delta t = 10^{-5} \text{ s}$	IQM $\Delta t = 10^{-5} \text{ s}$	IQM $\Delta t = 10^{-4} \text{ s}$	IQM $\Delta t = 10^{-3} \text{ s}$
204.5 s	178.8 s	18.0 s	2.0 s

En la **Tabla 8.3** se muestran los tiempos de cómputo para los diferentes pasos de tiempo usando la IQM, mostrando la ventaja del algoritmo ya que al hacer más largo el paso de tiempo, se reduce el tiempo de cómputo considerablemente. Cabe mencionar que al hacer el paso de tiempo más largo, se aumenta la cantidad de micropasos para compensar que el macropaso se hizo más largo.

Finalmente se puede concluir que para este tipo de problemas, AZTRAN obtiene excelentes resultados con tiempos de cómputo del orden de 2 segundos.

8.3 Descripción de los problemas 1D: caso estático y dependiente del Tiempo

En este problema ^[22,26,28,29] se representa un reactor rápido de cría que usa metal líquido como refrigerante. Los materiales usados en este problema, fueron seleccionados por ser precisamente representativos de un reactor de este tipo.

En la **Figura 8.3** se muestra la configuración del reactor, donde las regiones extremas (zonas 1 y 7) representan la región del cobertor (blanket), esto es la capa de material fértil colocada sobre el exterior del núcleo del reactor para cría. El núcleo está representado por las zonas 2, 4 y 6, las zonas 3 y 5 corresponden a una mezcla de sodio y de material de control. Los flujos angulares en las direcciones entrantes en las fronteras son iguales a cero y el término de fuente externa es cero.

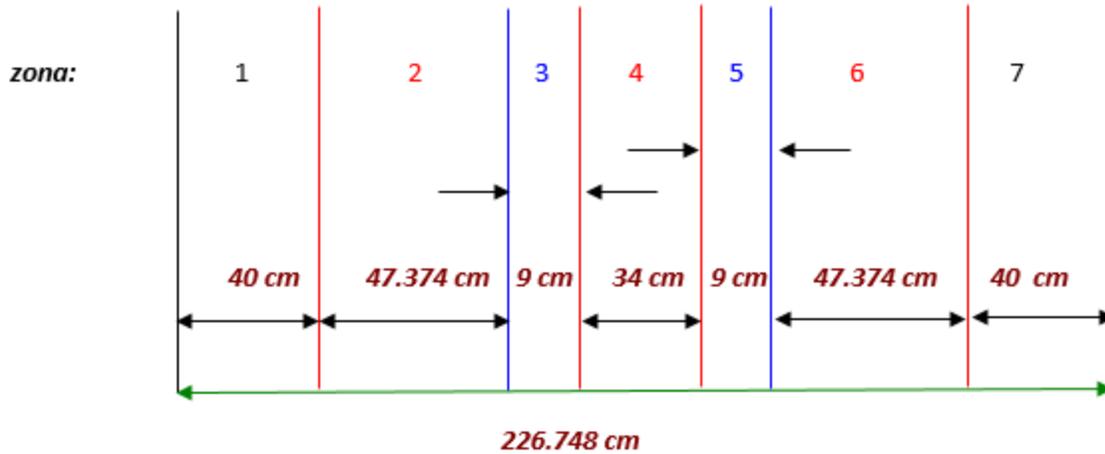


Figura 8.3 Configuración del reactor del problema Benchmark 16A.

En la **Tabla 8.4** se muestran los valores de las secciones eficaces para dos grupos de energía y en la **Tabla 8.5** se dan los intervalos del mallado espacial para cada zona. Con estos parámetros se procedió a resolver el caso estático y se comparó el factor de multiplicación efectiva obtenida con otros códigos de transporte en una dimensión, TNX ^[10], ONETRAN ^[30], ANISN ^[31], que resuelven la ecuación de transporte en una dimensión usando la técnica de ordenadas discretas, para este problema se usó la cuadratura S_4 dada en la **Tabla 8.6**.

Tabla 8.4 Secciones eficaces problema Benchmark 16A (cm^{-1}).

zona	Grupo g	Σ_t^g	$\Sigma_s^{g \rightarrow g}$	$\Sigma_s^{g \rightarrow g'}$	$\nu \Sigma_f^g$
1, 7	1	2.411×10^{-1}	2.33644×10^{-1}	3.598×10^{-3}	8.3441×10^{-4}
	2	4.172×10^{-1}	4.07004×10^{-1}	0.0	3.2776×10^{-4}
2, 4, 6	1	1.849×10^{-1}	1.77711×10^{-1}	2.085×10^{-3}	7.4518×10^{-3}
	2	3.668×10^{-1}	3.53721×10^{-1}	0.0	1.1061×10^{-2}
3, 5	1	9.432×10^{-2}	8.5710×10^{-2}	1.7168×10^{-3}	0.0
	2	1.876×10^{-1}	1.7131×10^{-1}	0.0	0.0

Tabla 8.5 Malla espacial unidimensional.

Zona	Número de intervalos	Espesor
1	20	40 cm
2	24	47.374 cm
3	5	9 cm
4	16	34 cm
5	5	9 cm
6	24	47.374 cm
7	20	40 cm

Tabla 8.6 Cuadratura angular S_4 para el Benchmark 16.

$\cos(\theta)$	Peso
-0.788675	0.25
-0.211325	0.25
0.211325	0.25
0.788675	0.25

Finalmente en la **Tabla 8.7** se comparan los resultados obtenidos con AZTRAN, usando una tolerancia de 10^{-6} para la k_{eff} y los flujos, contra los resultados obtenidos con los otros códigos. Se puede observar que al comparar los resultados obtenidos con AZTRAN y los otros códigos, se obtienen diferencias menores a 13 pcm, esto permite que se resuelvan los problemas dependientes del tiempo partiendo de un cálculo estacionario previamente determinado.

Tabla 8.7 Resultados del factor de multiplicación efectiva en el caso estático unidimensional.

AZTRAN	TNXT	ONETRAN	ANISN
1.00006	1.00001	1.00019	1.00000
Diferencia(pcm)	4.99	12.9	6

Para los casos dependientes del tiempo se simularon tres diferentes problemas, donde cada uno emplea seis grupos de precursores dados en la **Tabla 8.8** y los espectros de fisión para los neutrones inmediatos como para los retardados se consideran idénticos con $\lambda_1=1.0$ y $\lambda_2=0.0$. También se consideran los recíprocos de las velocidades como $1/v_1=1.851\times 10^{-9}$ s/cm y $1/v_2=1.088\times 10^{-8}$ s/cm .

Tabla 8.8 Parámetros de los precursores de neutrones retardados.

i	β_i	$\lambda_i(s^{-1})$
1	0.81×10^{-4}	0.0129
2	6.87×10^{-4}	0.0311
3	6.12×10^{-4}	0.134
4	11.38×10^{-4}	0.331
5	5.12×10^{-4}	1.260
6	1.70×10^{-4}	3.210

Según indican los autores de este problema Benchmark, las perturbaciones en cada uno de los problemas o casos, fueron seleccionadas para enfatizar efectos espacio-tiempo.

Las soluciones de referencia a estos problemas fueron obtenidas usando TNXT ^[10], TIMEX ^[32] y TDA ^[33], estos códigos son las versiones dependientes del tiempo de los códigos, TNX, ONETRAN y ANISN respectivamente, usados para resolver la parte estática.

TNXT se basa en la aproximación de multigrupos, ordenadas discretas y para las variables espacial y temporal se utilizó un esquema nodal de elemento finito fuertemente discontinuo.

TIMEX emplea un esquema convencional de ordenadas discretas para la variable angular y la variable espacial es tratada con una aproximación por elementos finitos lineal discontinuo. Los autores indican que, en el caso de TIMEX, para el modelo matemático consideraron la aproximación para dos grupos de energía, aproximación angular por ordenadas discretas, aproximación espacial lineal discontinua, esquema de diferencias de primer orden semi-implícitas para el tiempo con un rebalance de malla y extrapolación exponencial. Usaron además extrapolación exponencial para la variable temporal.

El código TDA se basa, también, en una aproximación por multigrupos respecto a la energía, aproximación angular por ordenadas discretas, diferencia espacial pesada y aproximación de tiempo por rebalance de malla automático.

Con el código AZTRAN, se optó por realizar una versión dependiente del tiempo solamente en una dimensión, usando un esquema implícito para el tiempo, con un rebalance de malla gruesa.

A continuación, se muestran las descripciones de los problemas de referencia con dependencia en tiempo, los resultados obtenidos con AZTRAN y la comparación con los valores de referencia.

8.3.1 Descripción del problema benchmark 16-A1

En el primer caso de este problema denominado 16-A1, al tiempo $t = 0$ s, la densidad del material en la zona 2 se incrementa en un 5% y la densidad del material en la zona 6 se decrementa en un 5%, resultando en una inserción de reactividad tipo escalón y subsecuentemente un transitorio supercrítico retardado.

8.3.2 Solución al benchmark 16-A1

Para este problema las ejecuciones de TIMEX y TDA se realizaron con los pasos de tiempo indicados en las **Tablas 8.9 y 8.10** respectivamente.

Tabla 8.9 Pasos de tiempo para TIMEX usados para el problema 16-A1.

Zona de tiempo (seg)	Δt (s)
0 a 1×10^{-3}	2×10^{-8}
1×10^{-3} a 1×10^{-1}	2×10^{-6}
0.1 a 1.0	2×10^{-5}
1.0 a 10.0	2×10^{-4}

Tabla 8.10 Pasos de tiempo para TDA para el problema 16-A1.

Zona de tiempo (seg)	Δt (s)
0 a 1×10^{-4}	1×10^{-6}
1×10^{-4} a 1×10^{-1}	5×10^{-6}
0.1 a 1.0	5×10^{-6}

Para TNXT y AZTRAN se utilizaron los pasos de tiempo dados en la **Tabla 8.9** y una tolerancia para los flujos de 2×10^{-6} .

8.3.3 Resultados obtenidos para el problema 16-A1

Se muestran a continuación, en las **Figuras 8.4 y 8.5** los resultados obtenidos con AZTRAN, de la potencia normalizada y flujos escalares, comparados con los valores de referencias.

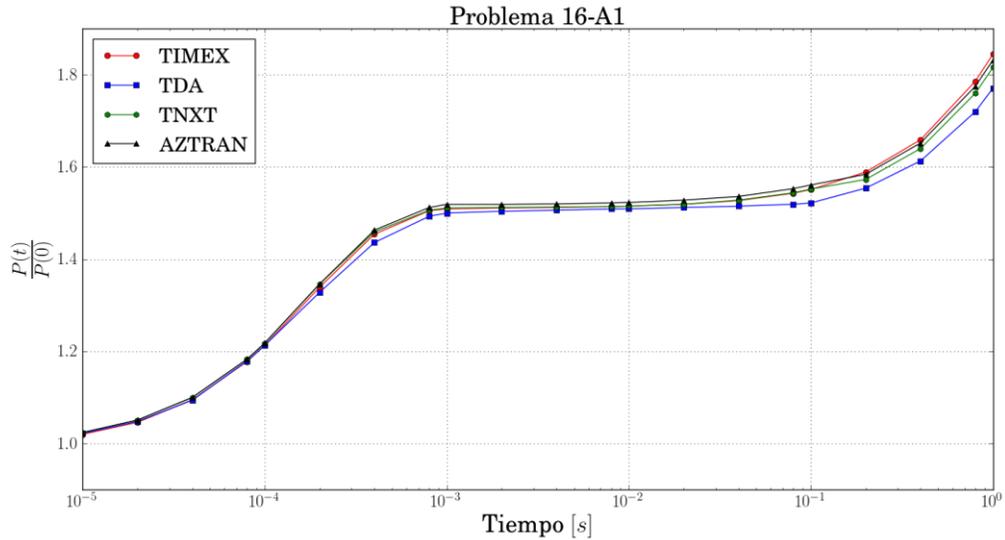


Figura 8.4 Potencia normalizada para el problema 16-A1 con diferentes códigos.

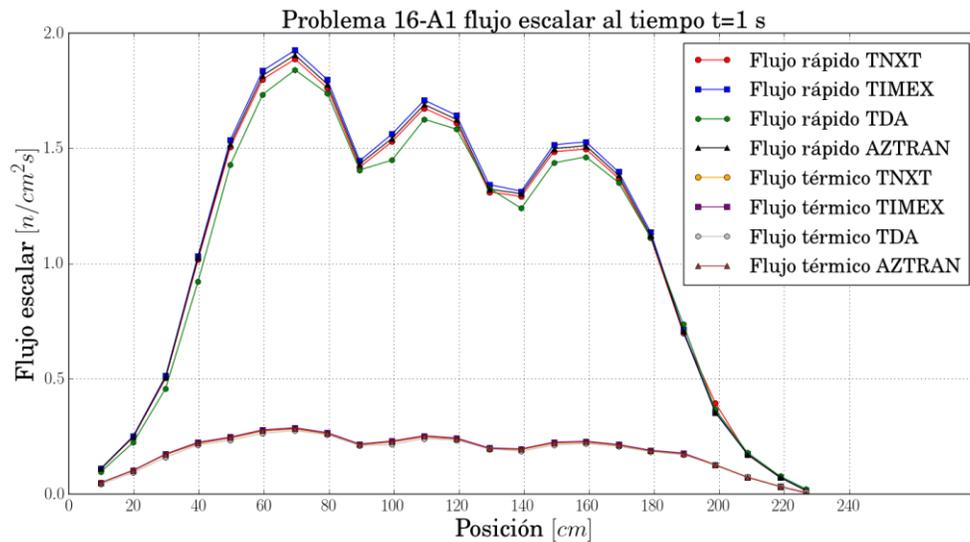


Figura 8.5 Flujo escalar de neutrones, térmico y rápido, al tiempo $t = 1$ s, para el problema 16-A1 con diferentes códigos.

Capítulo 8

En la **Tabla 8.11** se muestra la potencia normalizada obtenida con AZTRAN comparada con los valores de referencia.

Tabla 8.11 Comparación de la potencia normalizada problema 16-A1.

16-A1	AZTRAN	TNXT	Diferencia (pcm)	TIMEX	Diferencia (pcm)	TDA	Diferencia (pcm)
TIEMPO $t[s]$	$\frac{P(t)}{P(0)}$	$\frac{P(t)}{P(0)}$		$\frac{P(t)}{P(0)}$		$\frac{P(t)}{P(0)}$	
0.000E+00	1.000E+00	1.000E+00	0.00	1.000E+00	0.00	1.000E+00	0.00
1.000E-05	1.024E+00	1.024E+00	0.00	1.020E+00	392.16	1.022E+00	195.69
2.000E-05	1.051E+00	1.051E+00	0.00	1.046E+00	478.01	1.048E+00	286.26
4.000E-05	1.100E+00	1.100E+00	0.00	1.095E+00	456.62	1.094E+00	548.45
8.000E-05	1.183E+00	1.183E+00	0.00	1.178E+00	424.45	1.179E+00	339.27
1.000E-04	1.218E+00	1.218E+00	0.00	1.213E+00	412.20	1.213E+00	412.20
2.000E-04	1.346E+00	1.346E+00	0.00	1.339E+00	522.78	1.328E+00	1355.42
4.000E-04	1.463E+00	1.459E+00	274.16	1.454E+00	618.98	1.436E+00	1880.22
8.000E-04	1.512E+00	1.506E+00	398.41	1.505E+00	465.12	1.493E+00	1272.61
1.000E-03	1.519E+00	1.511E+00	529.45	1.509E+00	662.69	1.500E+00	1266.67
2.000E-03	1.519E+00	1.512E+00	462.96	1.511E+00	529.45	1.504E+00	997.34
4.000E-03	1.520E+00	1.513E+00	462.66	1.512E+00	529.10	1.506E+00	929.61
8.000E-03	1.522E+00	1.514E+00	528.40	1.514E+00	528.40	1.509E+00	861.50
1.000E-02	1.523E+00	1.515E+00	528.05	1.515E+00	528.05	1.509E+00	927.77
2.000E-02	1.528E+00	1.519E+00	592.50	1.519E+00	592.50	1.512E+00	1058.20
4.000E-02	1.536E+00	1.528E+00	523.56	1.527E+00	589.39	1.515E+00	1386.14
8.000E-02	1.553E+00	1.544E+00	582.90	1.543E+00	648.09	1.519E+00	2238.31
1.000E-01	1.561E+00	1.552E+00	579.90	1.551E+00	644.75	1.522E+00	2562.42
2.000E-01	1.584E+00	1.573E+00	699.30	1.589E+00	314.66	1.554E+00	1930.50
4.000E-01	1.652E+00	1.640E+00	731.71	1.659E+00	421.94	1.613E+00	2417.85
8.000E-01	1.775E+00	1.760E+00	852.27	1.786E+00	615.90	1.720E+00	3197.67
1.000E+00	1.832E+00	1.816E+00	881.06	1.845E+00	704.61	1.771E+00	3444.38

8.3.4 Descripción del problema benchmark 16-A2

En el segundo caso de este problema denominado 16-A2, al tiempo $t = 0$ s, la densidad del material en la zona 2 se incrementa en un 10% y la densidad de material en la zona 6 se decrementa en un 10%, resultando en una inserción de reactividad tipo escalón y subsecuentemente un transitorio supercrítico inmediato.

8.3.5 Solución al benchmark 16-A2

Para este problema, las ejecuciones de TIMEX y TDA se realizaron con los pasos de tiempo indicados en las **Tablas 8.12 y 8.13** respectivamente.

Tabla 8.12 Pasos de tiempo para TIMEX usados para el problema 16-A2.

Zona de tiempo (seg)	Δt (s)
0 a 1×10^{-4}	1×10^{-8}
1×10^{-4} a 5.1×10^{-3}	1×10^{-6}

Tabla 8.13 Pasos de tiempo para TDA para el problema 16-A2.

Zona de tiempo (seg)	Δt (s)
0 a 1×10^{-5}	2.5×10^{-7}
1×10^{-5} a 1×10^{-3}	2.5×10^{-5}
1×10^{-3} a 3×10^{-3}	2.5×10^{-5}

Para TNXT y AZTRAN se utilizaron los pasos de tiempo indicados en la **Tabla 8.14**, utilizando una tolerancia de 2×10^{-6} para el flujo.

Tabla 8.14 Pasos de tiempo para TNXT y AZTRAN usados para el problema 16-A2.

Zona de tiempo (seg)	Δt (s)
0 a 1×10^{-5}	1×10^{-8}
1×10^{-5} a 1×10^{-4}	1×10^{-8}
1×10^{-4} a 1×10^{-3}	1×10^{-8}
1×10^{-3} a 3×10^{-3}	1×10^{-7}
3×10^{-3} a 5×10^{-3}	1×10^{-7}

8.3.6 Resultados obtenidos para el problema 16-A2

Se muestra a continuación en las **Figuras 8.6 y 8.7** los resultados de la potencia normalizada y flujos escalares obtenidos con AZTRAN comparados con los valores de referencia.

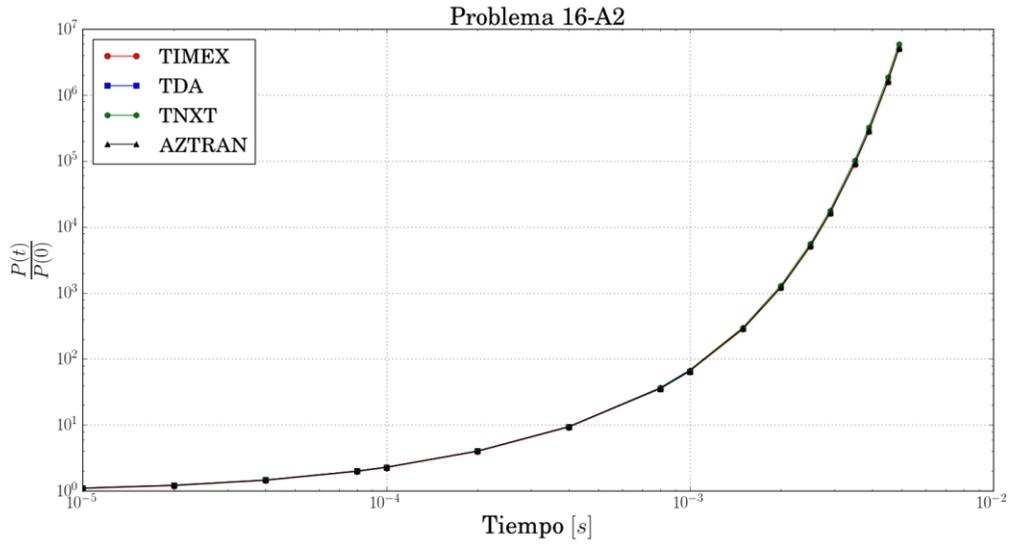


Figura 8.6 Potencia normalizada para el problema 16-A2 con diferentes códigos.

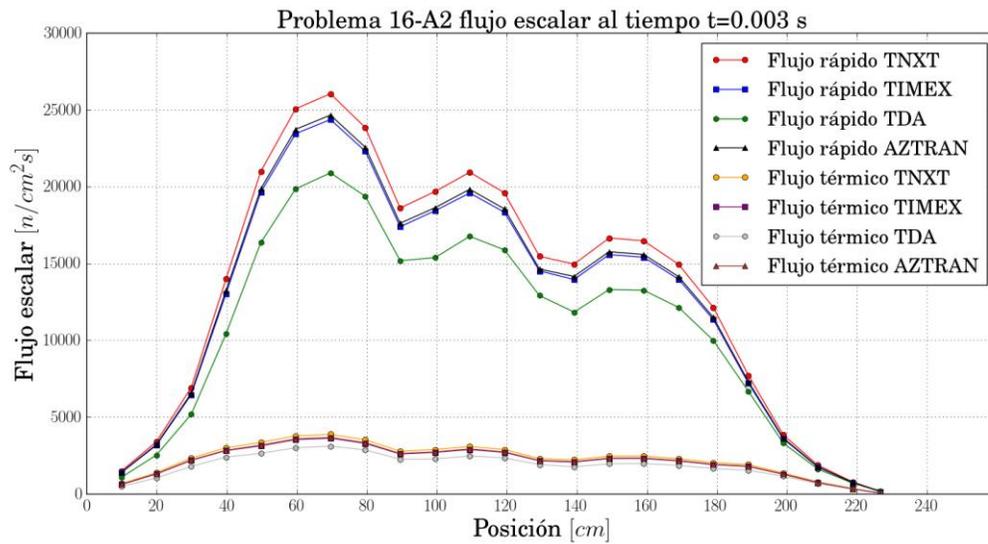


Figura 8.7 Flujo escalar de neutrones, térmico y rápido, al tiempo $t=0.003$ s, para el problema 16-A2 con diferentes códigos.

En la **Tabla 8.15** se muestran los resultados obtenidos con AZTRAN y la comparación con los valores de referencia.

Tabla 8.15 Comparación de la potencia normalizada problema 16-A2.

16-A2	AZTRAN	TNXT	Diferencia (pcm)	TIMEX	Diferencia (pcm)	TDA	Diferencia (pcm)
TIEMPO $t[s]$	$\frac{P(t)}{P(0)}$	$\frac{P(t)}{P(0)}$		$\frac{P(t)}{P(0)}$		$\frac{P(t)}{P(0)}$	
0.000E+00	1.000E+00	1.000E+00	0.00	1.000E+00	0.00	1.000E+00	0.00
1.000E-05	1.099E+00	1.099E+00	0.00	1.082E+00	1571.16	1.105E+00	542.99
2.000E-05	1.215E+00	1.214E+00	82.37	1.195E+00	1673.64	1.219E+00	328.14
4.000E-05	1.458E+00	1.457E+00	68.63	1.434E+00	1673.64	1.462E+00	273.60
8.000E-05	1.990E+00	1.987E+00	150.98	1.956E+00	1738.24	1.996E+00	300.60
1.000E-04	2.281E+00	2.276E+00	219.68	2.240E+00	1830.36	2.285E+00	175.05
2.000E-04	4.007E+00	4.006E+00	24.96	3.936E+00	1803.86	4.019E+00	298.58
4.000E-04	9.380E+00	9.420E+00	424.63	9.208E+00	1867.94	9.435E+00	582.94
8.000E-04	3.589E+01	3.651E+01	1698.16	3.520E+01	1960.23	3.540E+01	1384.18
1.000E-03	6.604E+01	6.767E+01	2408.75	6.474E+01	2008.03	6.429E+01	2722.04
1.500E-03	2.876E+02	3.000E+02	4133.33	2.814E+02	2203.27	-	-
2.000E-03	1.221E+03	1.294E+03	5641.42	1.193E+03	2347.02	1.112E+03	9802.16
2.500E-03	5.158E+03	5.551E+03	7079.81	5.025E+03	2646.77	-	-
2.900E-03	1.631E+04	1.778E+04	8267.72	1.586E+04	2837.33	-	-
3.500E-03	9.171E+04	1.018E+05	9911.59	8.894E+04	3114.46	-	-
3.900E-03	2.899E+05	3.259E+05	11046.33	2.807E+05	3277.52	-	-
4.500E-03	1.629E+06	1.866E+06	12700.96	1.573E+06	3560.08	-	-
4.900E-03	5.152E+06	5.974E+06	13759.63	4.964E+06	3787.27	-	-

8.3.7 Descripción del problema benchmark 16-A3

En el tercer caso de este problema denominado 16-A3, al tiempo $t = 0$ s, el material de la zona 5 es cambiado de una mezcla de sodio y material de control a 100% de sodio, esto es equivalente a una extracción de barra de control. Entonces al tiempo $t = 0.0001$ s, el material en la zona 3 es cambiado de una mezcla de sodio y material de control a un 100% de material de control, siendo equivalente a una inserción de la barra de control.

En la **Tabla 8.16** se muestran las secciones eficaces para el material de la barra de control.

Tabla 8.16 Secciones eficaces iniciales para dos grupos de energía (cm^{-1}).

zona	Grupo g	Σ_t^g	$\Sigma_s^{g \rightarrow g}$	$\Sigma_s^{g \rightarrow g'}$
Sodio	1	6.83×10^{-2}	6.3293×10^{-2}	1.294×10^{-3}
	2	1.257×10^{-1}	1.21099×10^{-1}	0.0
Barra de control	1	1.795×10^{-1}	1.59078×10^{-1}	3.101×10^{-3}
	2	3.903×10^{-1}	3.35661×10^{-1}	0.0

8.3.8 Solución al benchmark 16-A3

Para este problema, las ejecuciones de TIMEX y TDA se realizaron con los pasos de tiempo indicados en las **Tablas 8.17** y **8.18** respectivamente. TNXT y AZTRAN utilizan los pasos de tiempo indicados en la **Tabla 8.17**.

Tabla 8.17 Pasos de tiempo para TIMEX usados para 16-A3.

Zona de tiempo (seg)	Δt (s)
0 a 3×10^{-4}	1×10^{-8}
3×10^{-4} a 1×10^{-3}	1×10^{-7}
1×10^{-3} a 1×10^{-2}	1×10^{-6}
1×10^{-2} a 1×10^{-1}	1×10^{-4}
1×10^{-1} a 1.0	1×10^{-3}
1.0 a 10.0	1×10^{-2}

Tabla 8.18 Pasos de tiempo para TDA para el problema 16-A3.

Zona de tiempo (seg)	Δt (s)
0 a 2×10^{-4}	5×10^{-7}
2×10^{-4} a 1×10^{-2}	5×10^{-5}

Análogamente, se utiliza una tolerancia para los flujos de 2×10^{-6} .

8.3.9 Resultados obtenidos para el problema 16-A3

Las Figuras 8.8 y 8.9 muestran la potencia normalizada así como los flujos de neutrones térmico y rápido. El crecimiento repentino de la potencia obedece a la extracción de barra de control y su posterior decremento a la inserción. Para los flujos estos muestran un fuerte crecimiento del lado más cercano a la ubicación de la barra de control.

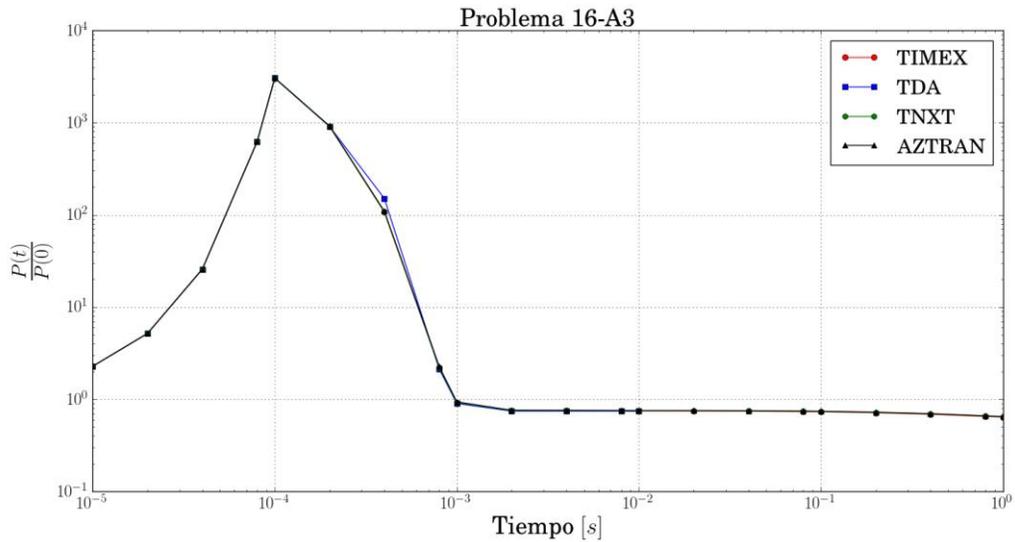


Figura 8.8 Potencia normalizada para el problema 16-A3 con diferentes métodos.

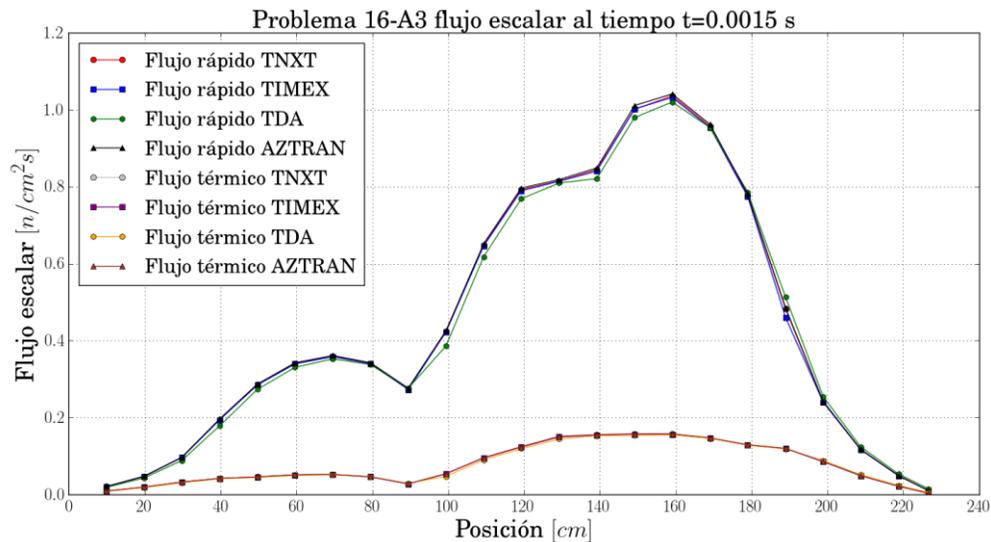


Figura 8.9 Flujo escalar de neutrones, térmico y rápido, al tiempo $t = 0.0015$ s, para el problema 16-A3 con diferentes métodos.

Capítulo 8

En la **Tabla 8.19** se muestran los resultados obtenidos con AZTRAN y la comparación con los valores de referencia.

Tabla 8.19 Comparación de la potencia normalizada problema 16-A3.

16-A3	AZTRAN	TNXT	Diferencia (pcm)	TIMEX	Diferencia (pcm)	TDA	Diferencia (pcm)
TIEMPO $t[s]$	$\frac{P(t)}{P(0)}$	$\frac{P(t)}{P(0)}$		$\frac{P(t)}{P(0)}$		$\frac{P(t)}{P(0)}$	
0.000E+00	1.000E+00	1.000E+00	0.00	1.000E+00	0.00	1.000E+00	0.00
1.000E-05	2.277E+00	2.276E+00	43.94	2.279E+00	87.76	2.277E+00	0.00
2.000E-05	5.160E+00	5.160E+00	0.00	5.167E+00	135.48	5.176E+00	309.12
4.000E-05	2.573E+01	2.568E+01	194.70	2.572E+01	38.88	2.575E+01	77.67
8.000E-05	6.217E+02	6.189E+02	452.42	6.199E+02	290.37	6.212E+02	80.49
1.000E-04	3.050E+03	3.032E+03	593.67	3.038E+03	395.00	3.045E+03	164.20
2.000E-04	9.194E+02	9.097E+02	1066.29	9.100E+02	1032.97	9.074E+02	1322.46
4.000E-04	1.093E+02	1.072E+02	1958.96	1.074E+02	1769.09	1.503E+02	27278.78
8.000E-04	2.278E+00	2.208E+00	3170.29	2.212E+00	2983.73	2.120E+00	7452.83
1.000E-03	9.369E-01	9.195E-01	1892.33	9.206E-01	1770.58	8.984E-01	4285.40
2.000E-03	7.590E-01	7.553E-01	489.87	7.504E-01	1146.06	7.434E-01	2098.47
4.000E-03	7.570E-01	7.533E-01	491.17	7.501E-01	919.88	7.431E-01	1870.54
8.000E-03	7.547E-01	7.511E-01	479.30	7.492E-01	734.12	7.419E-01	1725.30
1.000E-02	7.540E-01	7.504E-01	479.74	7.488E-01	694.44	7.402E-01	1864.36
2.000E-02	7.539E-01	7.503E-01	479.81	7.467E-01	964.24	-	-
4.000E-02	7.514E-01	7.479E-01	467.98	7.425E-01	1198.65	-	-
8.000E-02	7.436E-01	7.401E-01	472.91	7.347E-01	1211.38	-	-
1.000E-01	7.399E-01	7.364E-01	475.29	7.311E-01	1203.67	-	-
2.000E-01	7.233E-01	7.198E-01	486.25	7.135E-01	1373.51	-	-
4.000E-01	6.970E-01	6.936E-01	490.20	6.863E-01	1559.08	-	-
8.000E-01	6.609E-01	6.576E-01	501.82	6.507E-01	1567.54	-	-
1.000E+00	6.475E-01	6.442E-01	512.26	6.386E-01	1393.67	-	-

En relación con la aceptación de los resultados que ofrece el código desarrollado en este trabajo, se aclara que la aceptación está basada en el acuerdo con las dos soluciones independientes obtenidas usando los códigos TIMEX y TDA. En estos resultados la “potencia” (el número total de neutrones producidos por fisión y por unidad de tiempo) está normalizada a un neutrón por segundo al tiempo $t=0$ s. Para TIMEX, los valores dados para el flujo escalar corresponden a los valores promedio por cada intervalo de la malla y para TDA son los valores en las fronteras entre intervalos.

En las gráficas de potencia normalizada y flujo escalar se puede observar que AZTRAN obtiene resultados muy cercanos a los obtenidos con TNXT y TIMEX, esto permite observar el buen comportamiento que tiene AZTRAN sobre la solución de los problemas, además los pcm que se tienen son muy aceptables, ya que hay que recordar que los códigos de referencia utilizan diferentes técnicas para resolver los problemas dependientes del tiempo y AZTRAN se encuentra en el rango de la solución del problema.

8.4 Descripción de los problemas 2D: caso estático y dependiente del tiempo

Este problema ^[34-37], que se denominará simplemente como reactor TWIGL-2D, es un problema Benchmark dependiente del tiempo en 2 dimensiones para dos grupos de energía basado en la teoría de difusión, este modelo de reactor semilla-cobertor cuadrado tiene una dimensión de 160.0 cm x 160.0 cm y consta de 3 materiales, el material físil primario ocupa las zonas 1 y 2 mientras la zona 3 contiene al cobertor que también contiene material físil.

Dada la simetría del problema, éste se puede simular representando sólo un cuarto de núcleo, utilizando adecuadamente las condiciones de frontera, como se muestra en la **Figura 8.10**.

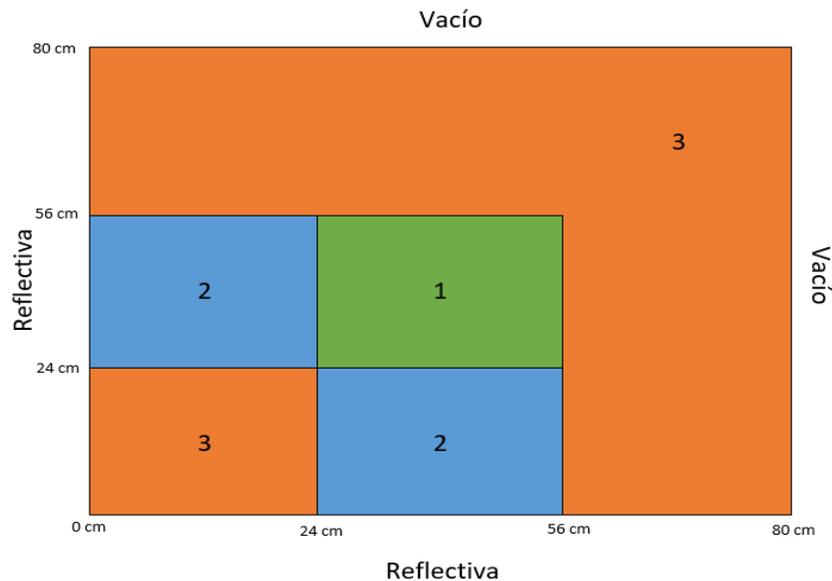


Figura 8.10 Modelo bidimensional del reactor TWIGL-2D.

Capítulo 8

En la **Tabla 8.20** se muestran la información de las secciones eficaces. Para la solución de la parte estática de este problema se utilizó el mallado espacial dado en la **Tabla 8.21**. Se comparó el valor del factor de multiplicación efectivo calculado con AZTRAN contra los valores obtenidos con los códigos CONQUEST^[36], POLCA-T^[37] y TNXY^[15], mostrado en la **Tabla 8.22**, los primeros dos códigos, CONQUEST y POLCA-T, son códigos de difusión y se utilizaron ya que el Benchmark es un problema de difusión y el último, TNXY, es un código de transporte que se utilizó para poder tener una mayor referencia en el cálculo. AZTRAN utiliza una tolerancia de 10^{-7} para la k_{eff} y 10^{-8} para los flujos.

Tabla 8.20 Secciones eficaces iniciales para dos grupos de energía (cm^{-1}).

zona	Grupo g	Σ_t^g	$\Sigma_s^{g \rightarrow g}$	$\Sigma_s^{g \rightarrow g'}$	$\nu \Sigma_f^g$
1	1	0.2481	0.2281	0.01	0.007
	2	0.9833	0.8333	0.0	0.2
2	1	0.2481	0.2281	0.01	0.007
	2	0.9833	0.8333	0.0	0.2
3	1	0.2644	0.2464	0.1	0.003
	2	0.7167	0.6667	0.0	0.006

Tabla 8.21 Malla espacial TWIGL-2D.

Región	Malla gruesa	Malla fina
$0 \leq x, y \leq 24 \text{ cm}$	24 cm	8 cm
$24 \text{ cm} \leq x, y \leq 56 \text{ cm}$	32 cm	8 cm
$56 \text{ cm} \leq x, y \leq 80 \text{ cm}$	24 cm	8 cm

Tabla 8.22 Resultados del factor de multiplicación efectiva en caso estático TWIGL-2D.

AZTRAN (S_2)	CONQUEST	POLCA-T	TNXY (S_2)
0.9174	0.9132	0.9132	0.9172
Diferencia(pcm)	459.9	459.9	21.8

En la **Tabla 8.22** se observa que hay una diferencia de 460 pcm entre los códigos de difusión y AZTRAN utilizando la aproximación S_2 , que equivaldría a difusión, pero si comparamos con TNXY, se encuentra una diferencia de hasta 22 pcm.

Es importante hacer notar que al comparar códigos de difusión contra códigos de transporte, se obtienen diferencias notables, sin embargo al comparar AZTRAN con TNXY, siendo ambos códigos de transporte los resultados son muy parecidos.

En la **Tabla 8.23** se muestra la comparación del factor de multiplicación efectivo usando la aproximación S_4 comparando con TNXY.

Tabla 8.23 Resultados del factor de multiplicación efectiva AZTRAN vs TNXY.

AZTRAN (S_4)	TNXY (S_4)
0.9180	0.9180
Diferencia(pcm)	0

En la parte dependiente del tiempo, un transitorio súper-crítico retrasado se inicia en el reactor debido a la disminución de la sección eficaz macroscópica de absorción total térmica en la región 1, esto repercute en la sección macroscópica total y de dispersión, se realizan por separado dos tipos de transitorios, en el primer caso, la perturbación se introduce como un cambio de tipo escalón al tiempo $t = 0.0s$ y en el segundo caso, un cambio de rampa se introduce durante el periodo de $0.0 < t < 0.2s$, en ambos casos el tiempo del transitorio total es de 0.5 s.

Perturbación escalón:

$$\Delta \Sigma_{a_2} = -0.0035 \text{ cm}^{-1}; t = 0.0 \text{ s}$$

Perturbación rampa:

$$\Sigma_{a_2}(t) = \begin{cases} \Sigma_{a_2}(0)[1 - 0.11667t] \text{ cm}^{-1}; t \leq 0.2 \text{ s} \\ \Sigma_{a_2}(0)[0.97666] \text{ cm}^{-1}; t > 0.2 \text{ s} \end{cases}$$

donde:

$$\Sigma_{a_2} = \Sigma_{t_2} - \Sigma_{s_2}$$

En la **Tabla 8.24** se muestran los datos cinéticos que corresponden al problema.

Tabla 8.24 Datos cinéticos para el problema TWIGL-2D.

Parámetro	β_1	λ_1 (s ⁻¹)	v_1 (cm/s)	v_2 (cm/s)	χ_1	χ_2
Valor	0.0075	0.08	1×10^7	2×10^5	1.0	0.0

A continuación se presentan los resultados obtenidos para cada tipo de transitorio, cada problema fue comparado con los valores de referencia ^[36], en los valores de referencia se utiliza la aproximación de difusión y para poder compararlos con AZTRAN se utiliza la aproximación S_2 , también se comparan los resultados contra el código bidimensional ARES^[34] usando la aproximación S_4 , este código resuelve la ecuación de transporte dependiente del tiempo de una forma parecida que AZTRAN, para resolver la dependencia en tiempo con AZTRAN se utiliza una tolerancia de 10^{-6} para los flujos.

En la **Figuras 8.11 y 8.12** se comparan los resultados obtenidos con AZTRAN contra los valores de referencia para el transitorio tipo escalón usando pasos de tiempo de $\Delta t = 10^{-4}$ s.

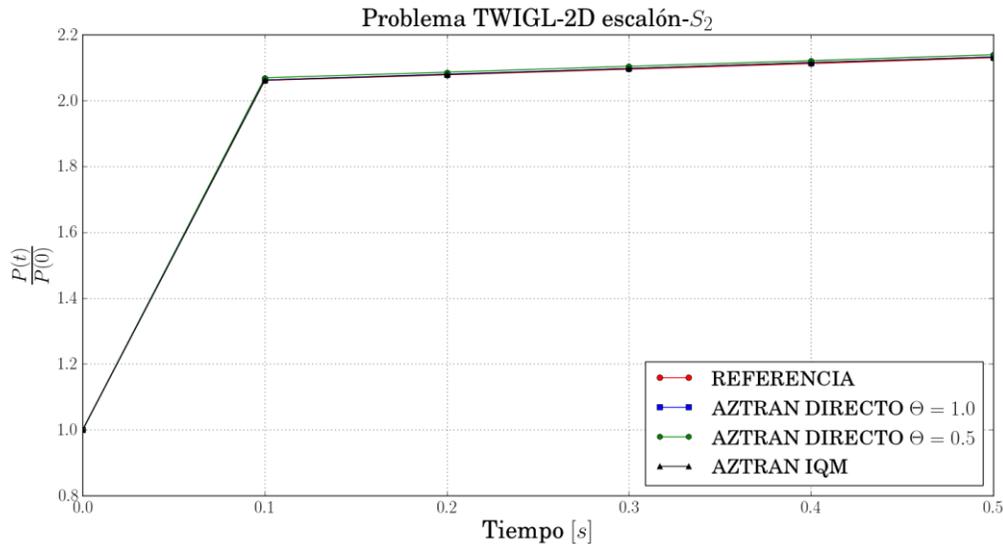


Figura 8.11 Potencia normalizada para el problema TWIGL-2D para una extracción de barra de control en forma de escalón usando AZTRAN la aproximación S_2 .

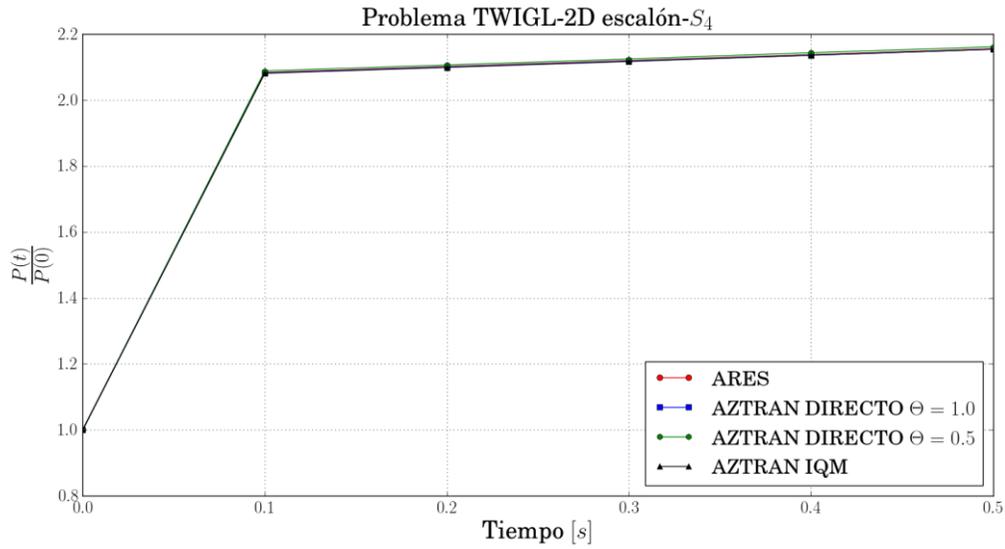


Figura 8.12 Potencia normalizada para el problema TWIGL-2D para una extracción de barra de control en forma de escalón usando AZTRAN la aproximación S_4 .

Análogamente en las **Figuras 8.13 y 8.14** se muestran los resultados obtenidos por AZTRAN comparados con los valores de referencia para el transitorio tipo rampa usando pasos de tiempo de $\Delta t = 10^{-4}$ s.

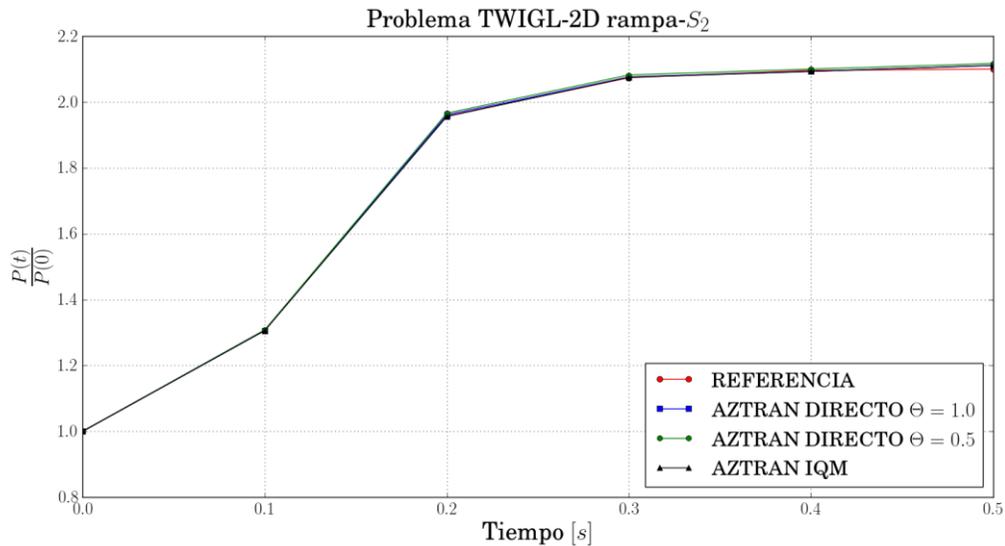


Figura 8.13 Potencia normalizada para el problema TWIGL-2D para una extracción de barra de control en forma de rampa usando AZTRAN la aproximación S_2 .

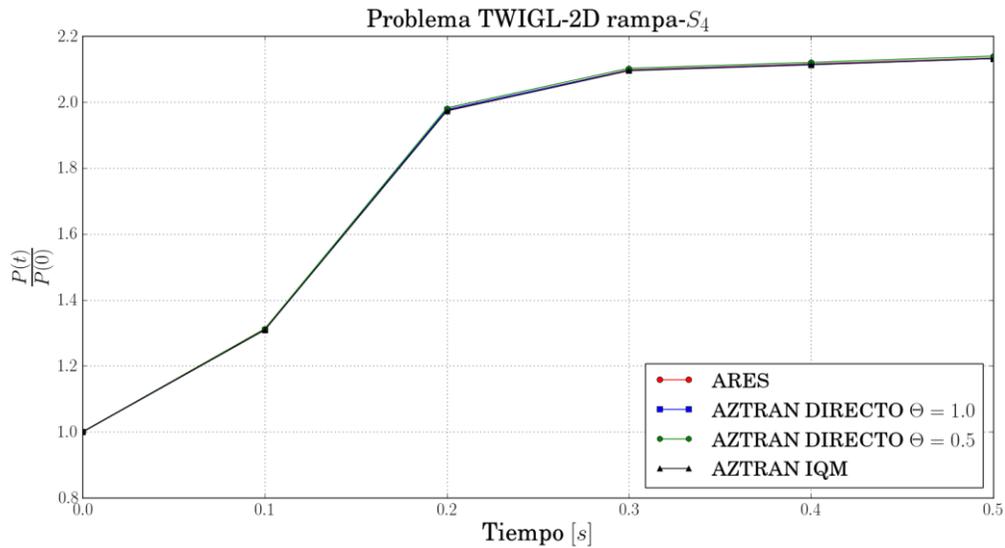


Figura 8.14 Potencia normalizada para el problema TWIGL-2D para una extracción de barra de control en forma de rampa usando AZTRAN la aproximación S_4 .

En las **Tablas 8.25, 8.26, 8.27 y 8.28** se muestran las diferencias en pcm de los resultados obtenidos para el problema TWIGL-2D.

Tabla 8.25 Comparación de la potencia normalizada TWIGL-2D escalón usando la aproximación S_2 .

TWIGL-2D escalón	REFERENCIA	AZTRAN $\theta=1.0$	Diferencia (pcm)	AZTRAN $\theta=0.5$	Diferencia (pcm)	AZTRAN IQM	Diferencia (pcm)
TIEMPO $t[s]$	$\frac{P(t)}{P(0)}$	$\frac{P(t)}{P(0)}$		$\frac{P(t)}{P(0)}$		$\frac{P(t)}{P(0)}$	
0.000E+00	1.000E+00	1.000E+00	0.00	1.000E+00	0.00	1.000E+00	0.00
1.000E-01	2.061E+00	2.062E+00	48.50	2.069E+00	388.66	2.062E+00	48.50
2.000E-01	2.078E+00	2.080E+00	96.15	2.086E+00	385.51	2.079E+00	48.10
3.000E-01	2.095E+00	2.097E+00	95.37	2.104E+00	427.76	2.097E+00	95.37
4.000E-01	2.112E+00	2.115E+00	141.84	2.121E+00	424.33	2.115E+00	141.84
5.000E-01	2.130E+00	2.132E+00	93.81	2.139E+00	420.76	2.132E+00	93.81

Tabla 8.26 Comparación de la potencia normalizada TWIGL-2D escalón usando la aproximación S₄.

TWIGL-2D escalón	ARES	AZTRAN $\theta=1.0$	Diferencia (pcm)	AZTRAN $\theta=0.5$	Diferencia (pcm)	AZTRAN IQM	Diferencia (pcm)
TIEMPO $t[s]$	$\frac{P(t)}{P(0)}$	$\frac{P(t)}{P(0)}$		$\frac{P(t)}{P(0)}$		$\frac{P(t)}{P(0)}$	
0.000E+00	1.000E+00	1.000E+00	0.00	1.000E+00	0.00	1.000E+00	0.00
1.000E-01	2.083E+00	2.082E+00	48.03	2.088E+00	239.46	2.081E+00	96.11
2.000E-01	2.101E+00	2.100E+00	47.62	2.106E+00	237.42	2.099E+00	95.28
3.000E-01	2.119E+00	2.118E+00	47.21	2.124E+00	235.40	2.117E+00	94.47
4.000E-01	2.137E+00	2.136E+00	46.88	2.143E+00	279.98	2.136E+00	46.82
5.000E-01	2.155E+00	2.154E+00	46.43	2.161E+00	277.65	2.154E+00	46.43

Tabla 8.27 Comparación de la potencia normalizada TWIGL-2D rampa usando la aproximación S₂.

TWIGL-2D rampa	REFERENCIA	AZTRAN $\theta=1.0$	Diferencia (pcm)	AZTRAN $\theta=0.5$	Diferencia (pcm)	AZTRAN IQM	Diferencia (pcm)
TIEMPO $t[s]$	$\frac{P(t)}{P(0)}$	$\frac{P(t)}{P(0)}$		$\frac{P(t)}{P(0)}$		$\frac{P(t)}{P(0)}$	
0.000E+00	1.000E+00	1.000E+00	0.00	1.000E+00	0.00	1.000E+00	0.00
1.000E-01	1.307E+00	1.306E+00	76.57	1.308E+00	76.45	1.306E+00	76.57
2.000E-01	1.957E+00	1.961E+00	203.98	1.966E+00	457.78	1.956E+00	51.12
3.000E-01	2.074E+00	2.076E+00	96.34	2.082E+00	384.25	2.075E+00	48.19
4.000E-01	2.096E+00	2.093E+00	143.33	2.100E+00	190.48	2.093E+00	143.33
5.000E-01	2.100E+00	2.111E+00	521.08	2.117E+00	803.02	2.111E+00	521.08

Tabla 8.28 Comparación de la potencia normalizada TWIGL-2D rampa usando la aproximación S₄.

TWIGL-2D rampa	ARES	AZTRAN $\theta=1.0$	Diferencia (pcm)	AZTRAN $\theta=0.5$	Diferencia (pcm)	AZTRAN IQM	Diferencia (pcm)
TIEMPO $t[s]$	$\frac{P(t)}{P(0)}$	$\frac{P(t)}{P(0)}$		$\frac{P(t)}{P(0)}$		$\frac{P(t)}{P(0)}$	
0.000E+00	1.000E+00	1.000E+00	0.00	1.000E+00	0.00	1.000E+00	0.00
1.000E-01	1.312E+00	1.309E+00	229.18	1.312E+00	0.00	1.309E+00	229.18
2.000E-01	1.975E+00	1.977E+00	101.16	1.982E+00	353.18	1.973E+00	101.37
3.000E-01	2.097E+00	2.096E+00	47.71	2.102E+00	237.87	2.095E+00	95.47
4.000E-01	2.115E+00	2.114E+00	47.30	2.120E+00	235.85	2.113E+00	94.65
5.000E-01	2.133E+00	2.132E+00	46.90	2.139E+00	280.50	2.132E+00	46.90

Capítulo 8

Como se muestra en las **Tablas 8.25, 8.26, 8.27 y 8.28**, las diferencias en pcm obtenidos contra los valores de referencia se encuentran en rangos admisibles.

En las comparaciones respecto a ARES, en las **Tablas 8.26 y 8.28**, las diferencias en pcm son pequeños, esto se debe a que ARES comparte ciertas características con AZTRAN en la resolución de problemas. También se puede observar que las mayores diferencias en pcm se encuentran al comparar contra AZTRAN con $\theta=0.5$, ya que ARES resuelve la parte temporal de forma implícita y con $\theta=0.5$ se resuelve con el método semi-implícito, el cual tiene mayor precisión.

En las **Tablas 8.25 y 8.27**, se utilizó la aproximación S_2 con AZTRAN ya que permite una aproximación de tipo difusión para así poder comparar con la referencia. En esta comparación se obtuvieron resultados admisibles.

En las **Tablas 8.29 y 8.30** se muestran los tiempos de cómputo del transitorio tipo escalón.

Tabla 8.29 Tiempos de cómputo problema TWIGL-2D escalón usando la aproximación S_2 .

AZTRAN $\theta=1.0$	AZTRAN $\theta=0.5$	AZTRAN IQM
163.1 s	126.3 s	358.2 s

Tabla 8.30 Tiempos de cómputo problema TWIGL-2D escalón usando la aproximación S_4 .

AZTRAN $\theta=1.0$	AZTRAN $\theta=0.5$	AZTRAN IQM
428.4 s	347.27 s	3006.07 s

De forma similar en las **Tablas 8.31 y 8.32** se muestran los tiempos de cómputo del transitorio tipo rampa.

Tabla 8.31 Tiempos de cómputo problema TWIGL-2D rampa usando la aproximación S_2 .

AZTRAN $\theta=1.0$	AZTRAN $\theta=0.5$	AZTRAN IQM
396.7 s	300.3 s	316.6 s

Tabla 8.32 Tiempos de cómputo problema TWIGL-2D rampa usando la aproximación S_4 .

AZTRAN $\theta=1.0$	AZTRAN $\theta=0.5$	AZTRAN IQM
1052.0 s	813.2 s	2652.3 s

En las **Tablas 8.29, 8.30, 8.31 y 8.32** se puede observar que usando el algoritmo de la IQM el tiempo de cómputo aumenta respecto de la forma directa y se puede observar que también influye al aumentar las direcciones angulares, esto se debe a que este algoritmo, IQM, resuelve la ecuación de transporte en el mismo intervalo de tiempo que el método directo y además debe resolver las ecuaciones de la cinética puntual en ese intervalo, es por eso que se deben de utilizar pasos de tiempo más largos.

En las **Figuras 8.15 y 8.16** se muestran las soluciones del problema TWIGL-2D escalón usando diferentes pasos de tiempo usando la IQM.

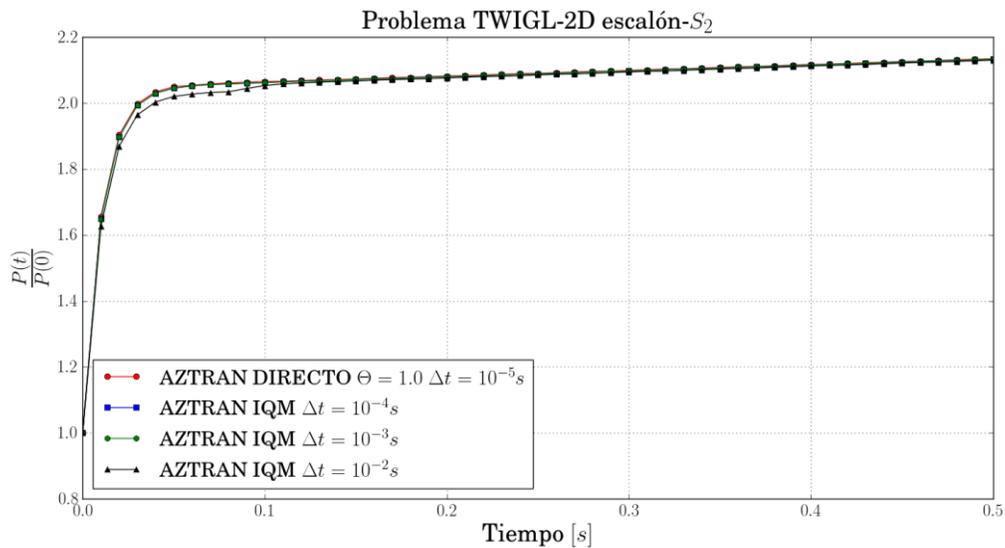


Figura 8.15 Potencia normalizada para el problema TWIGL-2D escalón usando diferentes pasos de tiempo empleando la aproximación S_2 .

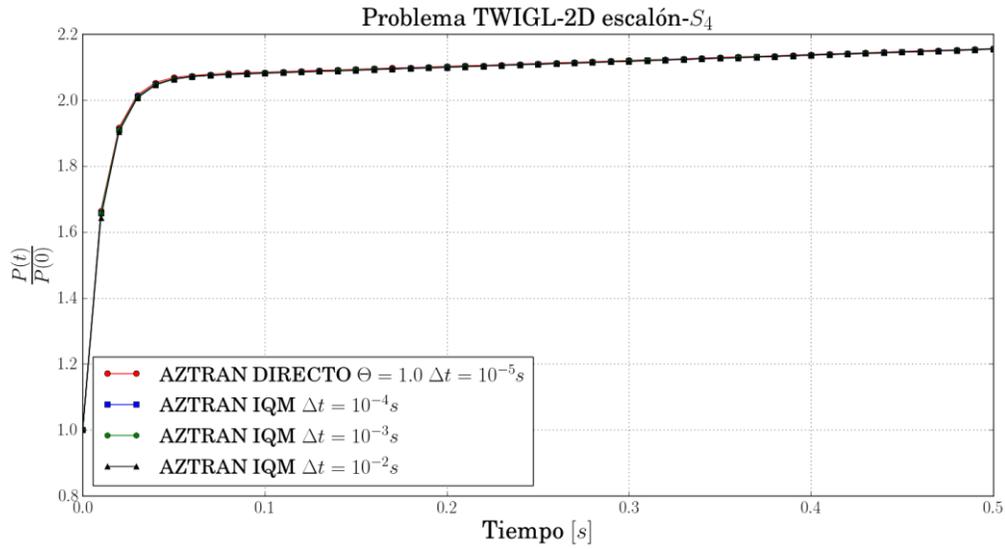


Figura 8.16 Potencia normalizada para el problema TWIGL-2D escalón usando diferentes pasos de tiempo empleando la aproximación S_4 .

En las **Figuras 8.17 y 8.18** se muestran de forma similar, la solución del problema TWIGL-2D rampa usando diferentes pasos de tiempo usando la IQM.

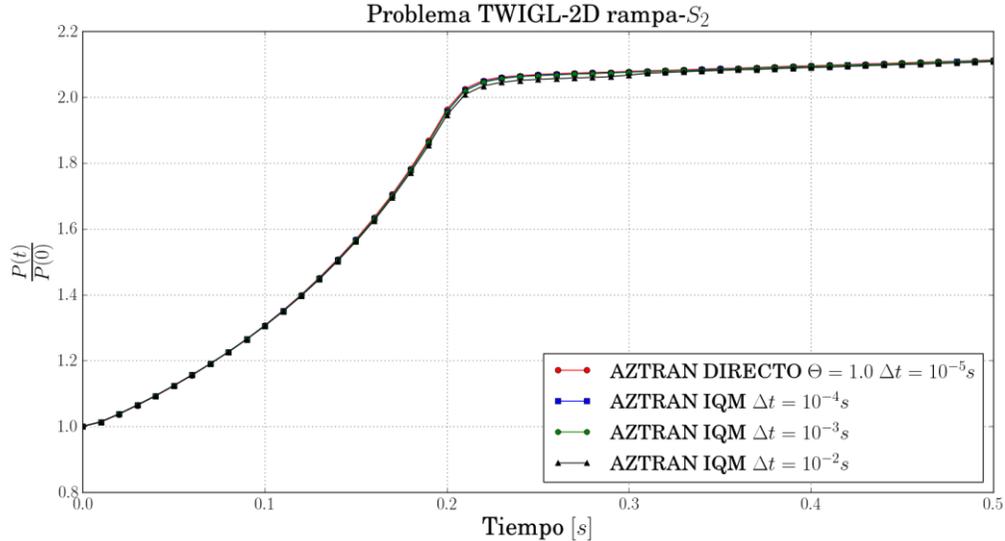


Figura 8.17 Potencia normalizada para el problema TWIGL-2D rampa usando diferentes pasos de tiempo empleando la aproximación S_2 .

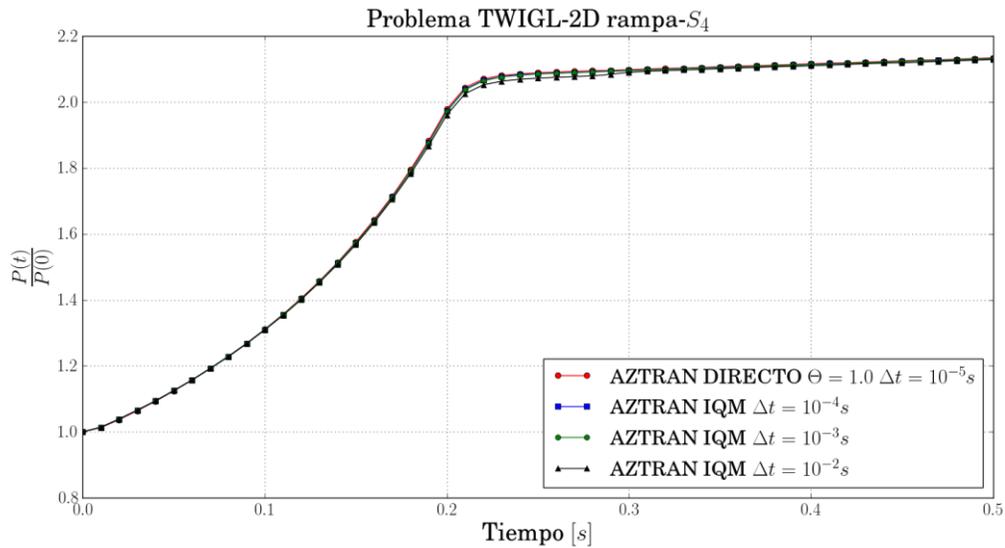


Figura 8.18 Potencia normalizada para el problema TWIGL-2D rampa usando diferentes pasos de tiempo empleando la aproximación S_4 .

Se puede observar en las **Figuras 8.15, 8.16, 8.17 y 8.18** que a pesar de que se hizo el paso de tiempo más largo el algoritmo IQM no dista mucho del resultado directo, aunque en el paso de tiempo de $\Delta t = 10^{-2}$ s empieza a perder precisión, ya que al ser un paso de tiempo largo, en la parte donde la función forma tiene cambios significativos, se pierde precisión, es por esto que sería recomendable implementar pasos de tiempo adaptativos, ya que esto permitiría eficientar esta metodología, permitiendo utilizar pasos de tiempo adecuados, es decir pasos de tiempo cortos donde la función forma tiene cambios significativos y pasos de tiempos largos donde la forma no cambia.

En las **Tablas 8.33, 8.34, 8.35 y 8.36** se muestran los tiempos de cómputo para los diferentes problemas. Se muestra que al hacer más largo el paso de tiempo, el tiempo de cómputo disminuye considerablemente y como ya se mencionó anteriormente la precisión de la solución se encuentra en términos admisibles.

Tabla 8.33 Tiempos de cómputo problema TWIGL-2D escalón S_2 diferentes pasos de tiempo.

$\theta = 1.0 \quad \Delta t = 10^{-5} \text{ s}$	IQM $\Delta t = 10^{-4} \text{ s}$	IQM $\Delta t = 10^{-3} \text{ s}$	IQM $\Delta t = 10^{-2} \text{ s}$
242.8 s	358.2 s	58.2 s	14.3 s

Tabla 8.34 Tiempos de cómputo problema TWIGL-2D escalón S₄ diferentes pasos de tiempo.

$\theta = 1.0 \ \Delta t = 10^{-5} \text{ s}$	IQM $\Delta t = 10^{-4} \text{ s}$	IQM $\Delta t = 10^{-3} \text{ s}$	IQM $\Delta t = 10^{-2} \text{ s}$
665.42 s	3006.0 s	452.77 s	111.7 s

Tabla 8.35 Tiempos de cómputo problema TWIGL-2D rampa S₂ diferentes pasos de tiempo.

$\theta = 1.0 \ \Delta t = 10^{-5} \text{ s}$	IQM $\Delta t = 10^{-4} \text{ s}$	IQM $\Delta t = 10^{-3} \text{ s}$	IQM $\Delta t = 10^{-2} \text{ s}$
574.5 s	316.6 s	52.0 s	16.1 s

Tabla 8.36 Tiempos de cómputo problema TWIGL-2D rampa S₄ diferentes pasos de tiempo.

$\theta = 1.0 \ \Delta t = 10^{-5}$	IQM $\Delta t = 10^{-4}$	IQM $\Delta t = 10^{-3}$	IQM $\Delta t = 10^{-2}$
1591.7 s	2652.3 s	396.14 s	95.4 s

Los resultados del código AZTRAN son buenos comparados con las dos valores de referencia mencionados que resuelven el problema de TWIGL-2D, este problema permite ratificar un problema dependiente del tiempo en dos dimensiones, en general el tiempo de cómputo aumenta en un problema en dos dimensiones respecto al de una dimensión. En este problema el módulo IQM se utilizó para resolver el problema en una malla de tiempo más larga y esto redujo el tiempo de cómputo y como se puede observar se obtienen resultados muy similares con los valores de referencia.

A continuación se muestran los flujos neutrónicos obtenidos del problema TWIGL-2D:

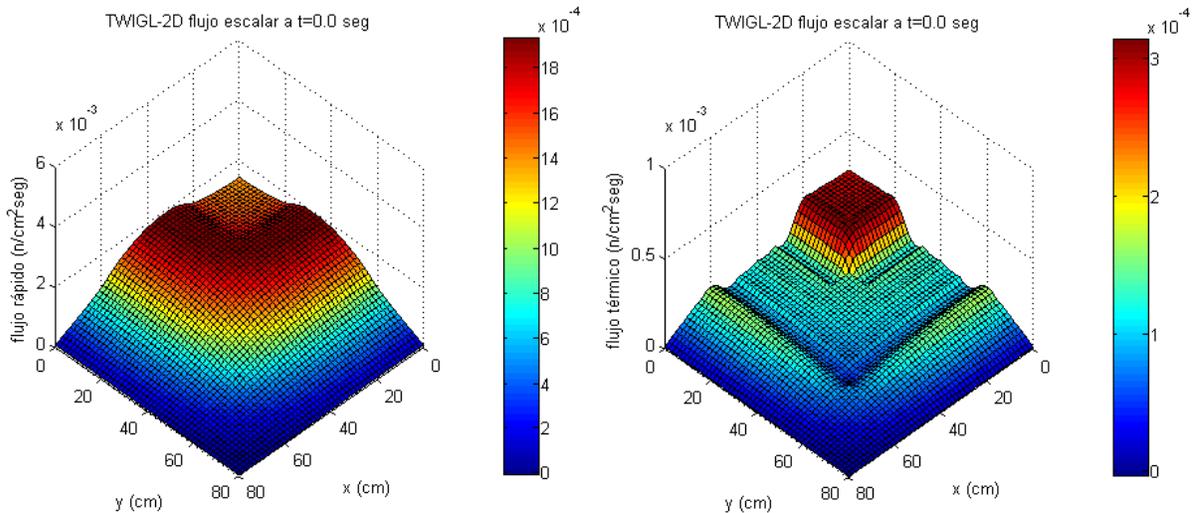


Figura 8.19 Flujo escalon TWIGL-2D al tiempo $t = 0.0 \text{ s}$.

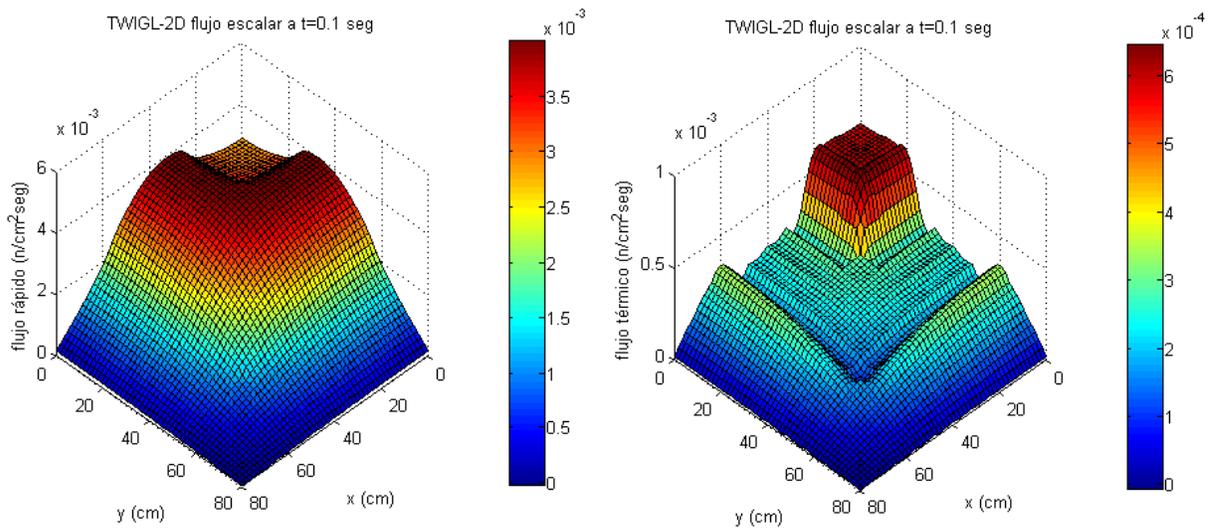


Figura 8.20 Flujo escalar escalón TWIGL-2D al tiempo $t = 0.1$ s.

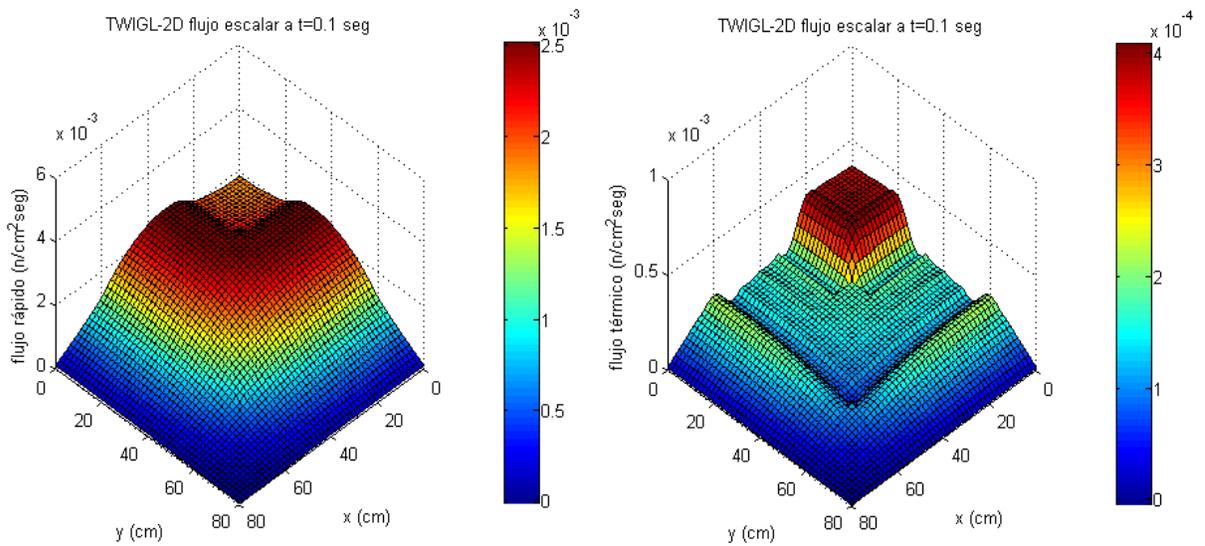


Figura 8.21 Flujo escalar rampa TWIGL-2D al tiempo $t = 0.1$ s.

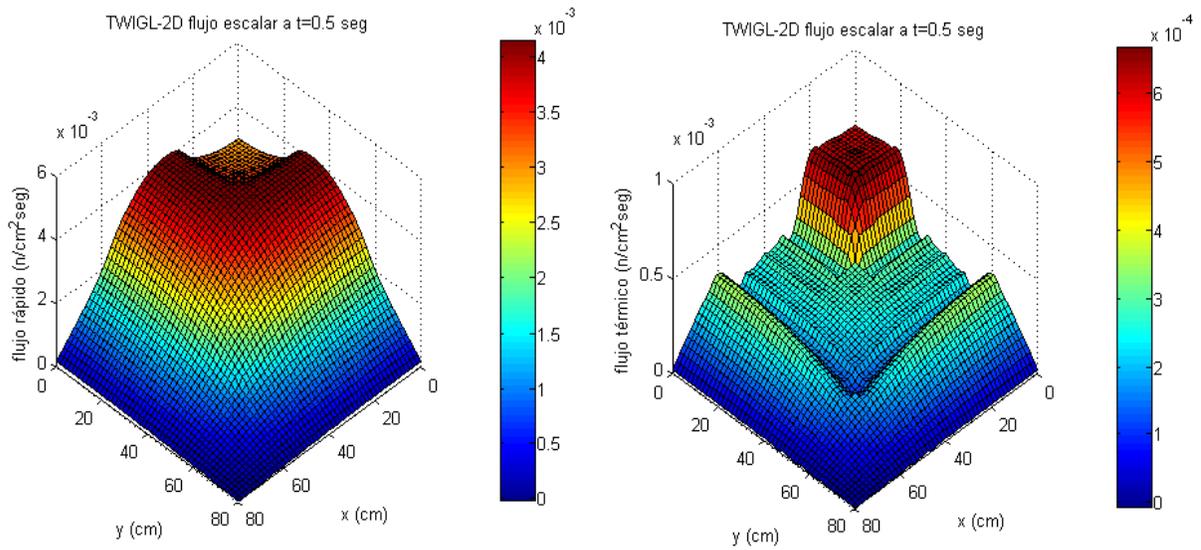


Figura 8.22 Flujo escalar escalón TWIGL-2D al tiempo $t = 0.5$ s.

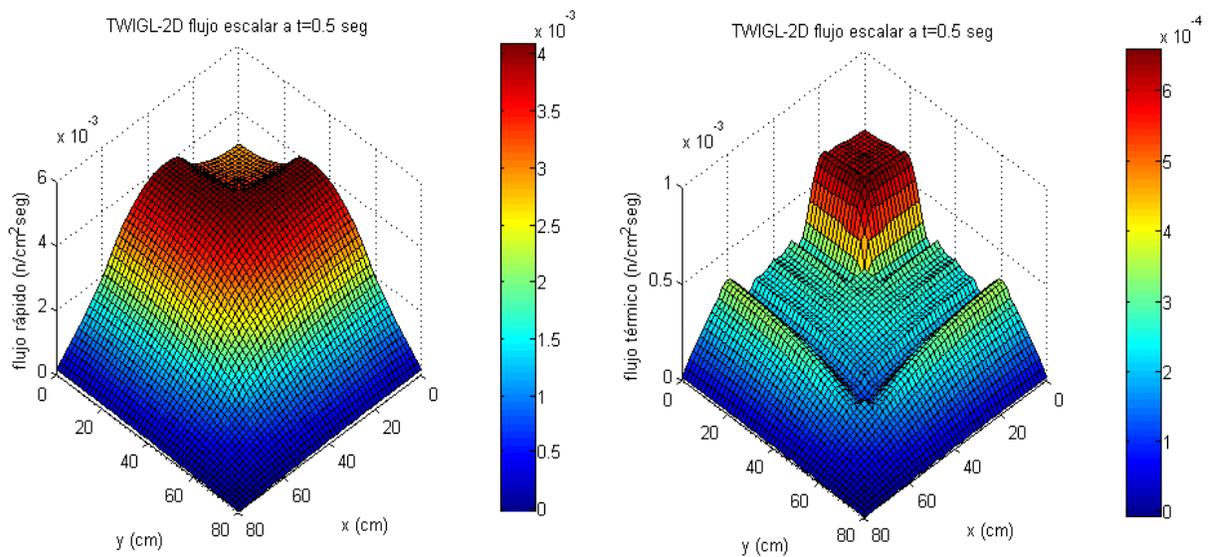


Figura 8.23 Flujo escalar rampa TWIGL-2D al tiempo $t = 0.5$ s.

8.5 Descripción del problema 3D: caso estático y dependiente del tiempo

Este problema Benchmark ^[38,39], es una extensión del problema bidimensional TWILG-2D, el cual consiste en el modelo de un reactor cúbico semilla cobertor heterogéneo simétrico, que tiene en la configuración bidimensional un material cobertor con material físil en el centro y esta zona está rodeada por material físil altamente enriquecido, esto a su vez está rodeado por otra región de cobertor. En la versión tridimensional se realizó esta configuración con un espesor de 112 cm en la dirección z y se agregó un material cobertor de 24.0 cm de espesor en la tapa superior e inferior, esto genera un reactor cúbico de 160.0 cm de lado.

En la **Figura 8.24** se muestra la geometría del reactor, representando un cuarto de núcleo del plano xy, ya que por la simetría de la configuración y aplicando las condiciones de frontera adecuadas no es necesario reproducir el problema completo. Finalmente la información de las secciones eficaces se presenta en la **Tabla 8.37**.

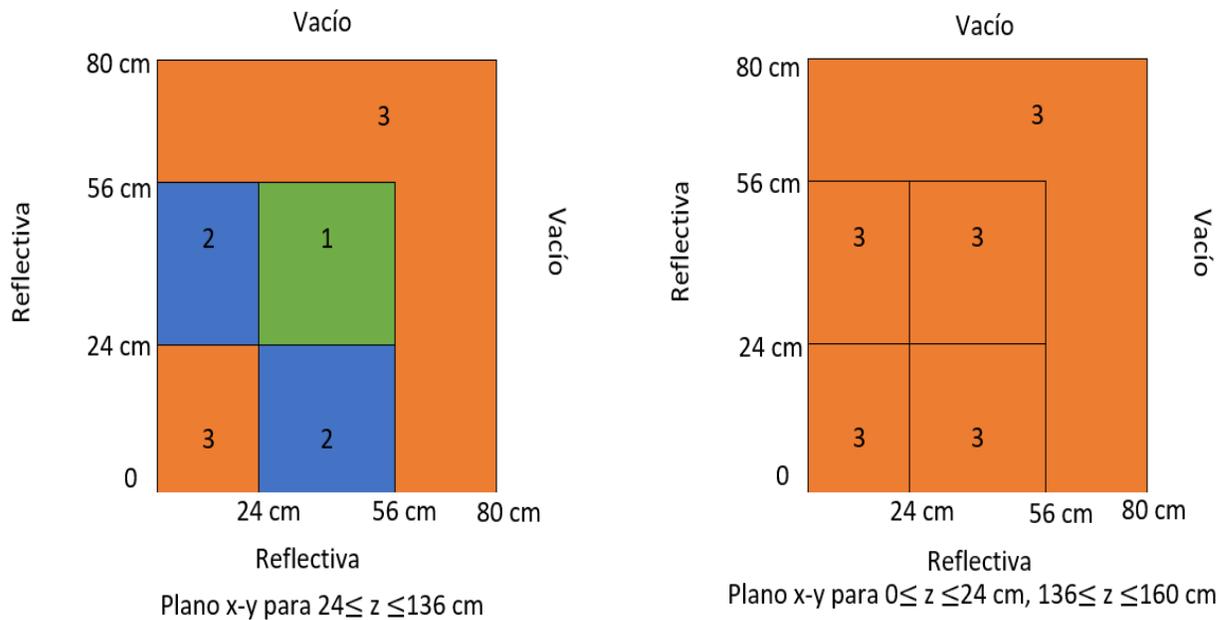


Figura 8.24 Modelo transversal y radial del reactor TWIGL-3D.

Tabla 8.37 Datos de las secciones eficaces para el reactor TWIGL-3D (unidades en cm^{-1}).

zona	Grupo g	Σ_t^g	$\Sigma_s^{g \rightarrow g}$	$\Sigma_s^{g \rightarrow g'}$	$\nu \Sigma_f^g$
1	1	0.238095	0.218095	0.01	0.0084
	2	0.833333	0.683333	0.0	0.24
2	1	0.238095	0.218095	0.01	0.0084
	2	0.833333	0.683333	0.0	0.24
3	1	0.25461	0.23661	0.1	0.0036
	2	0.666667	0.616667	0.0	0.072

Este problema de difusión fue seleccionado ya que en la literatura no se encuentra ningún Benchmark tridimensional para transporte dependiente del tiempo y por parte del proyecto AZTLAN Platform se cuenta con un código de difusión llamado AZKIND ^[5,16,40], esto permite resolver el problema con ambos códigos y poder comparar los valores obtenidos con AZTRAN usando la aproximación S_2 , la cual aproxima a la solución de difusión.

La solución estática es resuelta usando un mallado espacial dado en la **Tabla 8.38** y en la **Tabla 8.39** se muestra el valor del factor de multiplicación efectivo obtenido, que se comparó con el valor de referencia ^[38] y con AZKIND.

En AZTRAN se utilizó una tolerancia de 10^{-7} para la k_{eff} y 10^{-8} para los flujos.

Tabla 8.38 Malla espacial TWIGL-3D.

Región	Malla gruesa	Malla fina
$0 \leq x, y \leq 24 \text{ cm}$ $0 \leq z \leq 160 \text{ cm}$	24 cm	8 cm
$24 \text{ cm} \leq x, y \leq 56 \text{ cm}$ $0 \leq z \leq 160 \text{ cm}$	32 cm	8 cm
$56 \text{ cm} \leq x, y \leq 80 \text{ cm}$ $0 \leq z \leq 160 \text{ cm}$	24 cm	8 cm

Tabla 8.39 Resultados del factor de multiplicación efectiva en caso estático TWIGL-3D.

AZTRAN (S_2)	REFERENCIA	AZKIND
1.0673	1.0643	1.0646
Diferencia(pcm)	281.8	253.6

En la **Tabla 8.39** se observa que hay una diferencia de hasta 282 pcm entre el valor de referencia y AZTRAN, pero si se considera que utilizan diferentes metodologías para resolver el problema, es decir uno resuelve difusión y otro transporte, se puede concluir que con AZTRAN se obtiene una buena aproximación.

Para la parte dependiente de tiempo, como en el problema TWIGL-2D, se simula un transitorio súper-crítico retrasado mediante la disminución de la sección eficaz macroscópica total y de dispersión térmica en la región 1, también aquí se consideraron dos tipos de transitorios, en el primer caso la perturbación se introduce al tiempo $t = 0.0$ s como un cambio de perturbación tipo escalón, avanzando al tiempo $t = 0.2$ s esta perturbación es detenida y en el segundo caso, se introduce un cambio tipo rampa durante el periodo de $0.0 < t < 0.2$ s, en ambos casos el tiempo total del transitorio es de 0.3 s.

Para resolver la dependencia en tiempo se utilizó una tolerancia de 10^{-6} para los flujos.

En la **Tabla 8.40** se muestran los datos cinéticos que corresponden al problema TWIGL-3D.

Perturbación escalón:

$$\Delta\Sigma_{a_2} = -0.0045 \text{ cm}^{-1}; t = 0.0 \text{ s}$$

$$\Delta\Sigma_{a_2} = 0.0 \text{ cm}^{-1}; t \geq 0.2 \text{ s}$$

Perturbación rampa:

$$\Sigma_{a_2}(t) = \begin{cases} \Sigma_{a_2}(0)[1 - 0.0225t] \text{ cm}^{-1}; t \leq 0.2 \text{ s} \\ \Sigma_{a_2}(0)[0.9955] \text{ cm}^{-1}; t > 0.2 \text{ s} \end{cases}$$

donde:

$$\Sigma_{a_2} = \Sigma_{t_2} - \Sigma_{s_2 \rightarrow 2}$$

Tabla 8.40 Datos cinéticos TWIGL-3D.

Parámetro	β_1	$\lambda_1 (\text{s}^{-1})$	$v_1 (\text{cm/s})$	$v_2 (\text{cm/s})$	χ_1	χ_2
Valor	0.0075	0.08	1×10^7	2×10^5	1.0	0.0

A continuación se muestran los resultados obtenidos por AZTRAN utilizando la aproximación S_2 y se compararon con los obtenidos por AZKIND.

Capítulo 8

En la **Figura 8.25** se compara la potencia normalizada obtenida por AZTRAN contra AZKIND para el transitorio tipo escalón usando un paso de tiempo $\Delta t = 10^{-3}$ s.

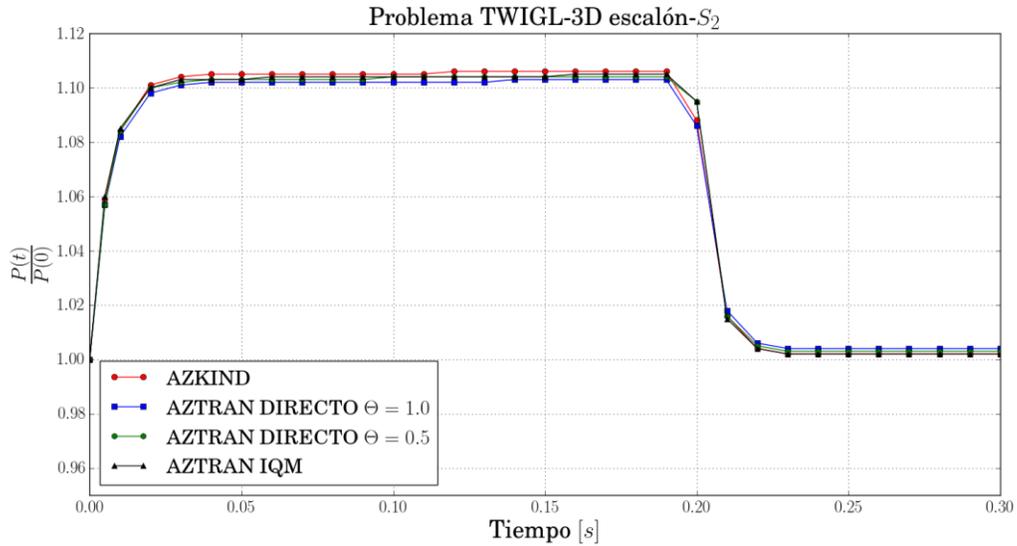


Figura 8.25 Potencia normalizada para el problema TWIGL-3D escalón usando AZTRAN la aproximación S_2 .

Análogamente se muestra en la **Figura 8.26** la comparación de la potencia normalizada obtenida contra AZKIND para el transitorio tipo rampa usando un paso $\Delta t = 10^{-3}$ s.

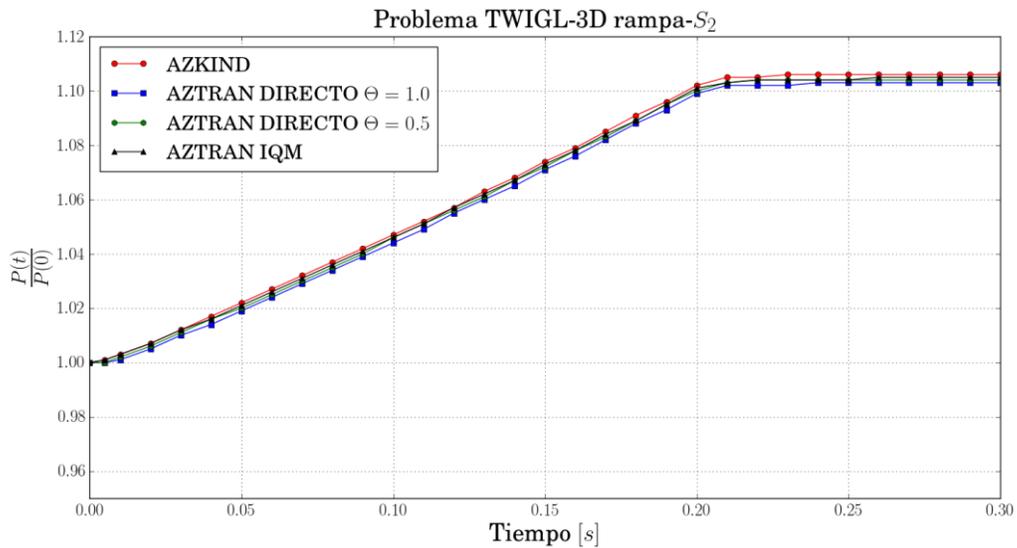


Figura 8.26 Potencia normalizada para el problema TWIGL-3D rampa usando AZTRAN la aproximación S_2 .

Tabla 8.41 Comparación de la potencia normalizada TWIGL-3D escalón usando la aproximación S_2 .

TWIGL-3D escalón	AZKIND	AZTRAN $\theta=1.0$	Diferencia (pcm)	AZTRAN $\theta=0.5$	Diferencia (pcm)	AZTRAN IQM	Diferencia (pcm)
TIEMPO $t[s]$	$\frac{P(t)}{P(0)}$	$\frac{P(t)}{P(0)}$		$\frac{P(t)}{P(0)}$		$\frac{P(t)}{P(0)}$	
0.000E+00	1.000E+00	1.000E+00	0.00	1.000E+00	0.00	1.000E+00	0.00
5.000E-03	1.059E+00	1.057E+00	189.21	1.057E+00	189.21	1.060E+00	94.34
1.000E-02	1.084E+00	1.082E+00	184.84	1.084E+00	0.00	1.085E+00	92.17
2.000E-02	1.101E+00	1.098E+00	273.22	1.100E+00	90.91	1.100E+00	90.91
3.000E-02	1.104E+00	1.101E+00	272.48	1.102E+00	181.49	1.103E+00	90.66
4.000E-02	1.105E+00	1.102E+00	272.23	1.103E+00	181.32	1.103E+00	181.32
5.000E-02	1.105E+00	1.102E+00	272.23	1.103E+00	181.32	1.103E+00	181.32
6.000E-02	1.105E+00	1.102E+00	272.23	1.103E+00	181.32	1.104E+00	90.58
7.000E-02	1.105E+00	1.102E+00	272.23	1.103E+00	181.32	1.104E+00	90.58
8.000E-02	1.105E+00	1.102E+00	272.23	1.103E+00	181.32	1.104E+00	90.58
9.000E-02	1.105E+00	1.102E+00	272.23	1.103E+00	181.32	1.104E+00	90.58
1.000E-01	1.105E+00	1.102E+00	272.23	1.104E+00	90.58	1.104E+00	90.58
1.100E-01	1.105E+00	1.102E+00	272.23	1.104E+00	90.58	1.104E+00	90.58
1.200E-01	1.106E+00	1.102E+00	362.98	1.104E+00	181.16	1.104E+00	181.16
1.300E-01	1.106E+00	1.102E+00	362.98	1.104E+00	181.16	1.104E+00	181.16
1.400E-01	1.106E+00	1.103E+00	271.99	1.104E+00	181.16	1.104E+00	181.16
1.500E-01	1.106E+00	1.103E+00	271.99	1.104E+00	181.16	1.104E+00	181.16
1.600E-01	1.106E+00	1.103E+00	271.99	1.104E+00	181.16	1.105E+00	90.50
1.700E-01	1.106E+00	1.103E+00	271.99	1.104E+00	181.16	1.105E+00	90.50
1.800E-01	1.106E+00	1.103E+00	271.99	1.104E+00	181.16	1.105E+00	90.50
1.900E-01	1.106E+00	1.103E+00	271.99	1.104E+00	181.16	1.105E+00	90.50
2.000E-01	1.088E+00	1.086E+00	184.16	1.095E+00	639.27	1.095E+00	639.27
2.100E-01	1.016E+00	1.018E+00	196.46	1.016E+00	0.00	1.015E+00	98.52
2.200E-01	1.004E+00	1.006E+00	198.81	1.005E+00	99.50	1.004E+00	0.00
2.300E-01	1.002E+00	1.004E+00	199.20	1.003E+00	99.70	1.002E+00	0.00
2.400E-01	1.002E+00	1.004E+00	199.20	1.003E+00	99.70	1.002E+00	0.00
2.500E-01	1.002E+00	1.004E+00	199.20	1.003E+00	99.70	1.002E+00	0.00
2.600E-01	1.002E+00	1.004E+00	199.20	1.003E+00	99.70	1.002E+00	0.00
2.700E-01	1.002E+00	1.004E+00	199.20	1.003E+00	99.70	1.002E+00	0.00
2.800E-01	1.002E+00	1.004E+00	199.20	1.003E+00	99.70	1.002E+00	0.00
2.900E-01	1.002E+00	1.004E+00	199.20	1.003E+00	99.70	1.002E+00	0.00
3.000E-01	1.002E+00	1.004E+00	199.20	1.003E+00	99.70	1.002E+00	0.00

Tabla 8.42 Comparación de la potencia normalizada TWIGL-3D rampa usando la aproximación S_2 .

TWIGL-3D rampa	AZKIND	AZTRAN $\theta=1.0$	Diferencia (pcm)	AZTRAN $\theta=0.5$	Diferencia (pcm)	AZTRAN IQM	Diferencia (pcm)
TIEMPO $t[s]$	$\frac{P(t)}{P(0)}$	$\frac{P(t)}{P(0)}$		$\frac{P(t)}{P(0)}$		$\frac{P(t)}{P(0)}$	
0.000E+00	1.000E+00	1.000E+00	0.00	1.000E+00	0.00	1.000E+00	0.00
5.000E-03	1.001E+00	1.000E+00	100.00	1.000E+00	100.00	1.001E+00	0.00
1.000E-02	1.003E+00	1.001E+00	199.80	1.002E+00	99.80	1.003E+00	0.00
2.000E-02	1.007E+00	1.005E+00	199.00	1.006E+00	99.40	1.007E+00	0.00
3.000E-02	1.012E+00	1.010E+00	198.02	1.011E+00	98.91	1.012E+00	0.00
4.000E-02	1.017E+00	1.014E+00	295.86	1.016E+00	98.43	1.016E+00	98.43
5.000E-02	1.022E+00	1.019E+00	294.41	1.020E+00	196.08	1.021E+00	97.94
6.000E-02	1.027E+00	1.024E+00	292.97	1.025E+00	195.12	1.026E+00	97.47
7.000E-02	1.032E+00	1.029E+00	291.55	1.030E+00	194.17	1.031E+00	96.99
8.000E-02	1.037E+00	1.034E+00	290.14	1.035E+00	193.24	1.036E+00	96.53
9.000E-02	1.042E+00	1.039E+00	288.74	1.040E+00	192.31	1.041E+00	96.06
1.000E-01	1.047E+00	1.044E+00	287.36	1.046E+00	95.60	1.046E+00	95.60
1.100E-01	1.052E+00	1.049E+00	285.99	1.051E+00	95.15	1.051E+00	95.15
1.200E-01	1.057E+00	1.055E+00	189.57	1.056E+00	94.70	1.057E+00	0.00
1.300E-01	1.063E+00	1.060E+00	283.02	1.061E+00	188.50	1.062E+00	94.16
1.400E-01	1.068E+00	1.065E+00	281.69	1.067E+00	93.72	1.067E+00	93.72
1.500E-01	1.074E+00	1.071E+00	280.11	1.072E+00	186.57	1.073E+00	93.20
1.600E-01	1.079E+00	1.076E+00	278.81	1.078E+00	92.76	1.078E+00	92.76
1.700E-01	1.085E+00	1.082E+00	277.26	1.083E+00	184.67	1.084E+00	92.25
1.800E-01	1.091E+00	1.088E+00	275.74	1.089E+00	183.65	1.089E+00	183.65
1.900E-01	1.096E+00	1.093E+00	274.47	1.095E+00	91.32	1.095E+00	91.32
2.000E-01	1.102E+00	1.099E+00	272.98	1.100E+00	181.82	1.101E+00	90.83
2.100E-01	1.105E+00	1.102E+00	272.23	1.103E+00	181.32	1.103E+00	181.32
2.200E-01	1.105E+00	1.102E+00	272.23	1.104E+00	90.58	1.104E+00	90.58
2.300E-01	1.106E+00	1.102E+00	362.98	1.104E+00	181.16	1.104E+00	181.16
2.400E-01	1.106E+00	1.103E+00	271.99	1.104E+00	181.16	1.104E+00	181.16
2.500E-01	1.106E+00	1.103E+00	271.99	1.104E+00	181.16	1.104E+00	181.16
2.600E-01	1.106E+00	1.103E+00	271.99	1.104E+00	181.16	1.105E+00	90.50
2.700E-01	1.106E+00	1.103E+00	271.99	1.104E+00	181.16	1.105E+00	90.50
2.800E-01	1.106E+00	1.103E+00	271.99	1.104E+00	181.16	1.105E+00	90.50
2.900E-01	1.106E+00	1.103E+00	271.99	1.104E+00	181.16	1.105E+00	90.50
3.000E-01	1.106E+00	1.103E+00	271.99	1.104E+00	181.16	1.105E+00	90.50

En la **Tabla 8.41** se puede observar la comparación de los resultados obtenidos con AZKIND contra los diferentes métodos de AZTRAN obteniendo valores por debajo de los 363 pcm, excepto donde empieza a bajar la potencia al tiempo 0.2 s, usando la IQM y $\theta=0.5$ se obtuvo un error de 640 pcm, los valores obtenidos son aceptables, recordando que AZKIND es un código difusión y AZTRAN transporte.

En la **Tabla 8.42** se observa un mejor comportamiento respecto al problema escalón, ya que usando $\theta=1.0$ todos los valores se encuentran por debajo de los 296 pcm, sin embargo usando IQM y $\theta=0.5$ se obtienen diferencias menores a 184 pcm.

En general AZTRAN tiene un comportamiento razonable a la solución del problema y obtuvo valores muy cercanos a la solución obtenida por AZKIND. Cabe mencionar que AZKIND es un código que ha sido probado para varios benchmark.

En las **Tablas 8.43 y 8.44** se muestran los tiempos de cómputo del transitorio tipo escalón y rampa respectivamente.

Tabla 8.43 Tiempos de cómputo problema TWIGL-3D escalón usando la aproximación S_2 .

AZTRAN $\theta=1.0$	AZTRAN $\theta=0.5$	AZTRAN IQM
1026.4 s	755.4 s	742.6 s

Tabla 8.44 Tiempos de cómputo problema TWIGL-3D rampa usando la aproximación S_2 .

AZTRAN $\theta=1.0$	AZTRAN $\theta=0.5$	AZTRAN IQM
1657.4 s	1363.6 s	557.8 s

Respecto a los tiempos de cómputo en este problema, se observa que el que mayor tiempo se lleva al realizar el cálculo con $\theta=1.0$, siguiendo a este con $\theta=0.5$ y teniendo el menor tiempo de cómputo con IQM, resultando ser más eficiente que los otros dos métodos, recordando que con esta metodología se obtuvieron los mejores resultados.

A continuación se presenta la comparación de la potencia normalizada usando el algoritmo IQM para diferentes pasos de tiempo, comparando con el directo usando un paso de tiempo más fino de $\Delta t = 10^{-4}$ s para observar qué tanto se puede alejar de la solución utilizando pasos de tiempo más largos.

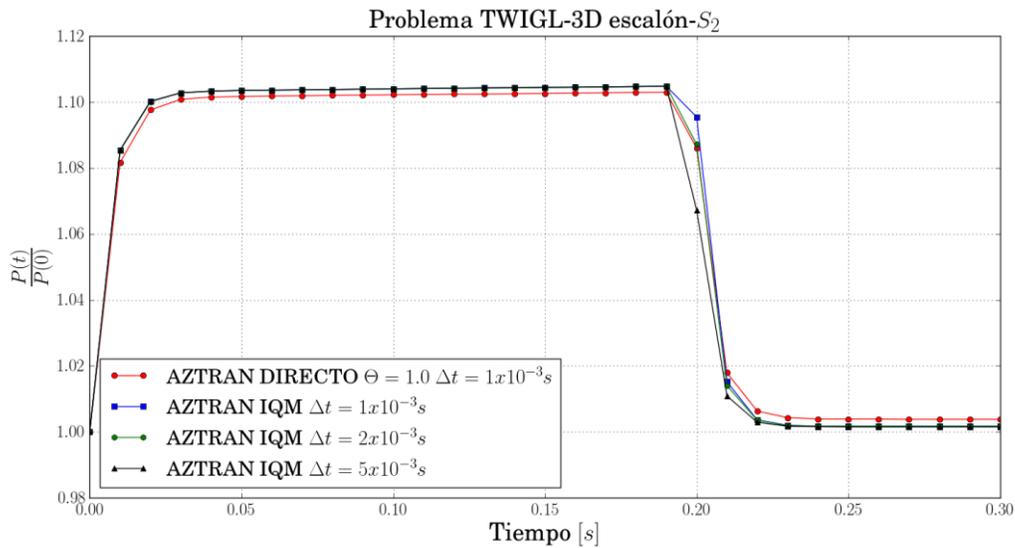


Figura 8.27 Potencia normalizada para el problema TWIGL-3D escalón empleando diferentes pasos de tiempo empleando la aproximación S_2 .

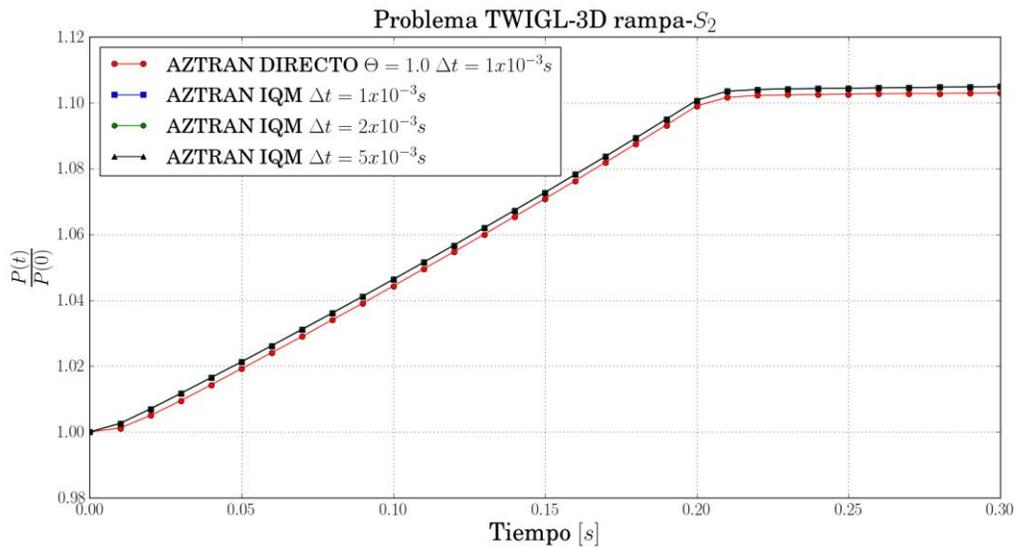


Figura 8.28 Potencia normalizada para el problema TWIGL-3D rampa empleando diferentes pasos de tiempo empleando la aproximación S_2 .

En la **Figura 8.27** se puede observar el comportamiento a diferentes pasos de tiempo, donde en el paso de tiempo más largo se pierde precisión, respecto a las otras comparaciones, concluyendo nuevamente el implementar pasos de tiempo adaptativos para eficientar el método.

En contra parte en la **Figura 8.28** se observa que usando la IQM no se pierde precisión, debido a que la función de forma cambia muy poco.

En las **Tablas 8.45 y 8.46** se muestran los tiempos de cómputo TWIGL-3D para diferentes pasos de tiempo.

Tabla 8.45 Tiempos de cómputo problema TWIGL-3D escalón S_2 diferentes pasos de tiempo.

$\theta=1.0 \Delta t=1 \times 10^{-3} \text{ s}$	IQM $\Delta t=1 \times 10^{-3} \text{ s}$	IQM $\Delta t=2 \times 10^{-3} \text{ s}$	IQM $\Delta t=5 \times 10^{-3} \text{ s}$
1026.4 s	742.6 s	517.7 s	248.04 s

Tabla 8.46 Tiempos de cómputo problema TWIGL-3D rampa S_2 diferentes pasos de tiempo.

$\theta=1.0 \Delta t=1 \times 10^{-3} \text{ s}$	IQM $\Delta t=1 \times 10^{-3} \text{ s}$	IQM $\Delta t=2 \times 10^{-3} \text{ s}$	IQM $\Delta t=5 \times 10^{-2} \text{ s}$
1657.4 s	557.8 s	393.9 s	272.7

En general para este problema, al comparar la potencia normalizada de AZTRAN de forma directa e IQM con lo obtenido con el código AZKIND, se obtuvieron resultados aceptables. Respecto a la versión IQM se tienen valores más cercanos a los resultados obtenidos con AZKIND que con el directo, con esto se puede constatar que las versiones de AZTRAN resuelven problemas dependientes del tiempo tridimensionales y que utilizando el módulo IQM se puede reducir el tiempo de cómputo sin perder precisión en el cálculo, siempre y cuando la función de forma no cambie mucho en el tiempo.

A continuación se muestran los flujos neutrónicos en las **Figuras 8.29, 8.30, 8.31, 8.32 y 8.33**, mostrando el flujo rápido y flujo térmico para los problemas escalón y rampa a diferentes tiempos y como es un problema tridimensional se muestran los flujos para diferentes planos, en el problema se consideró la tapa superior, la mitad del núcleo y el plano intermedio entre la tapa superior y la mitad del núcleo, los cuales son regiones de interés debido a la simetría del problema ya que son idénticos a la otra mitad, es decir, el flujo en la tapa superior es idéntico al flujo en la tapa inferior, el flujo en el plano intermedio entre la tapa superior y la mitad del núcleo es idéntico al flujo en el plano intermedio entre mitad del núcleo y la tapa inferior.

Capítulo 8

En los flujos del problema estático, **Figura 8.29**, se observa que la mayor concentración de flujo escalar se encuentra en la mitad del núcleo, mientras que en la tapa superior, por lo tanto también en la tapa inferior, hay una disminución del flujo, ya que es donde se encuentra el cobertor.

Para el problema dependiente del tiempo en el caso escalón se observa que hay un aumento de flujo en tiempo 0.1 s, **Figura 8.30**, pero al tiempo 0.3 s, **Figura 8.31**, el flujo regresa casi como en el estado estacionario y esto se debe a que al tiempo 0.2 s la potencia empieza a disminuir, lo cual afecta directamente al flujo.

Respecto al caso rampa se observa que conforme va avanzando el tiempo el flujo va aumentando, en este caso como la potencia no disminuye el flujo tampoco, esto refuerza los resultados obtenidos con el código AZTRAN, ya que aparte de cumplir el comportamiento de la potencia normalizada también cumple con el comportamiento del flujo escalar.

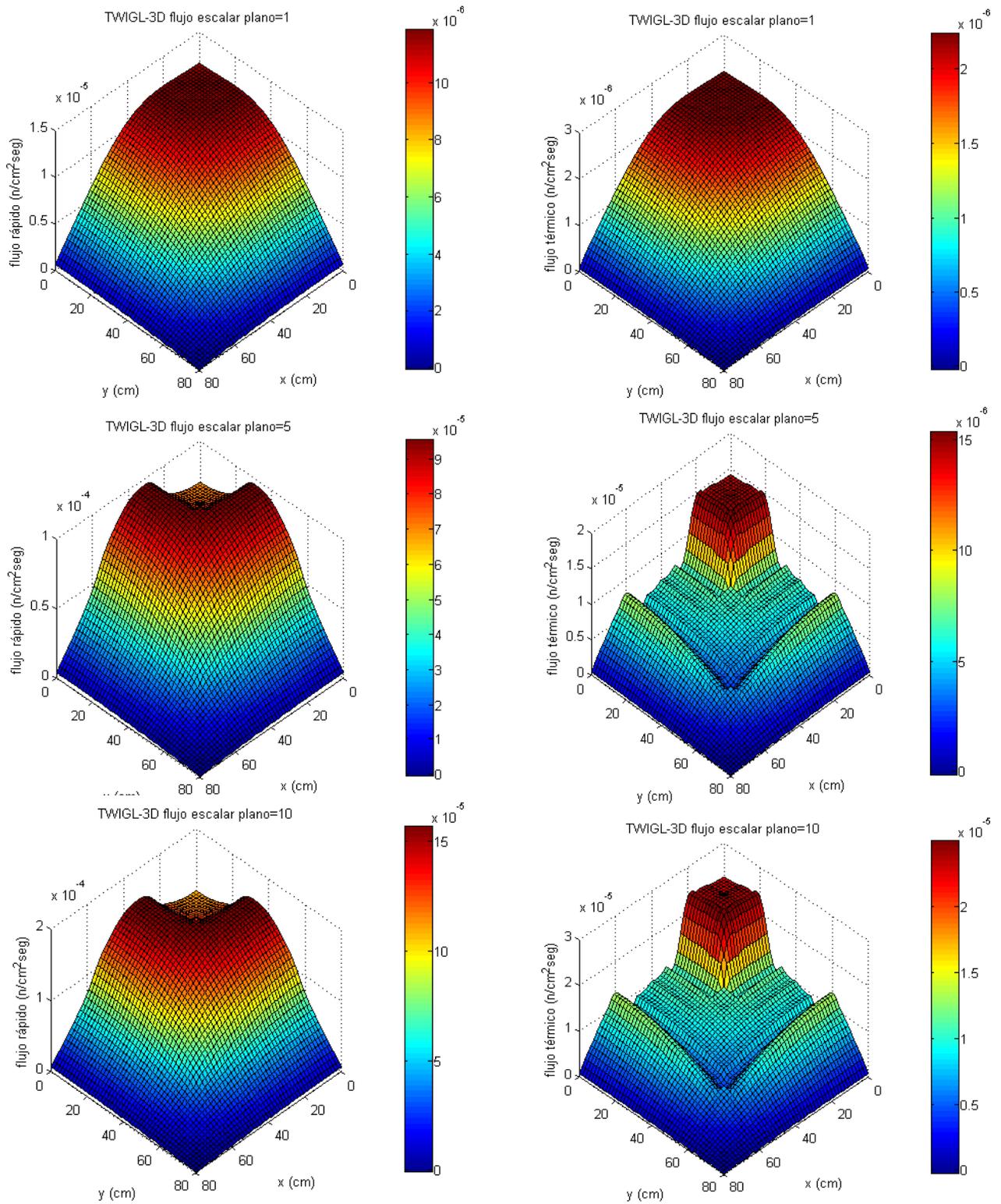


Figura 8.29 Flujo neutrónico TWIGL-3D a $t=0.0$ s.

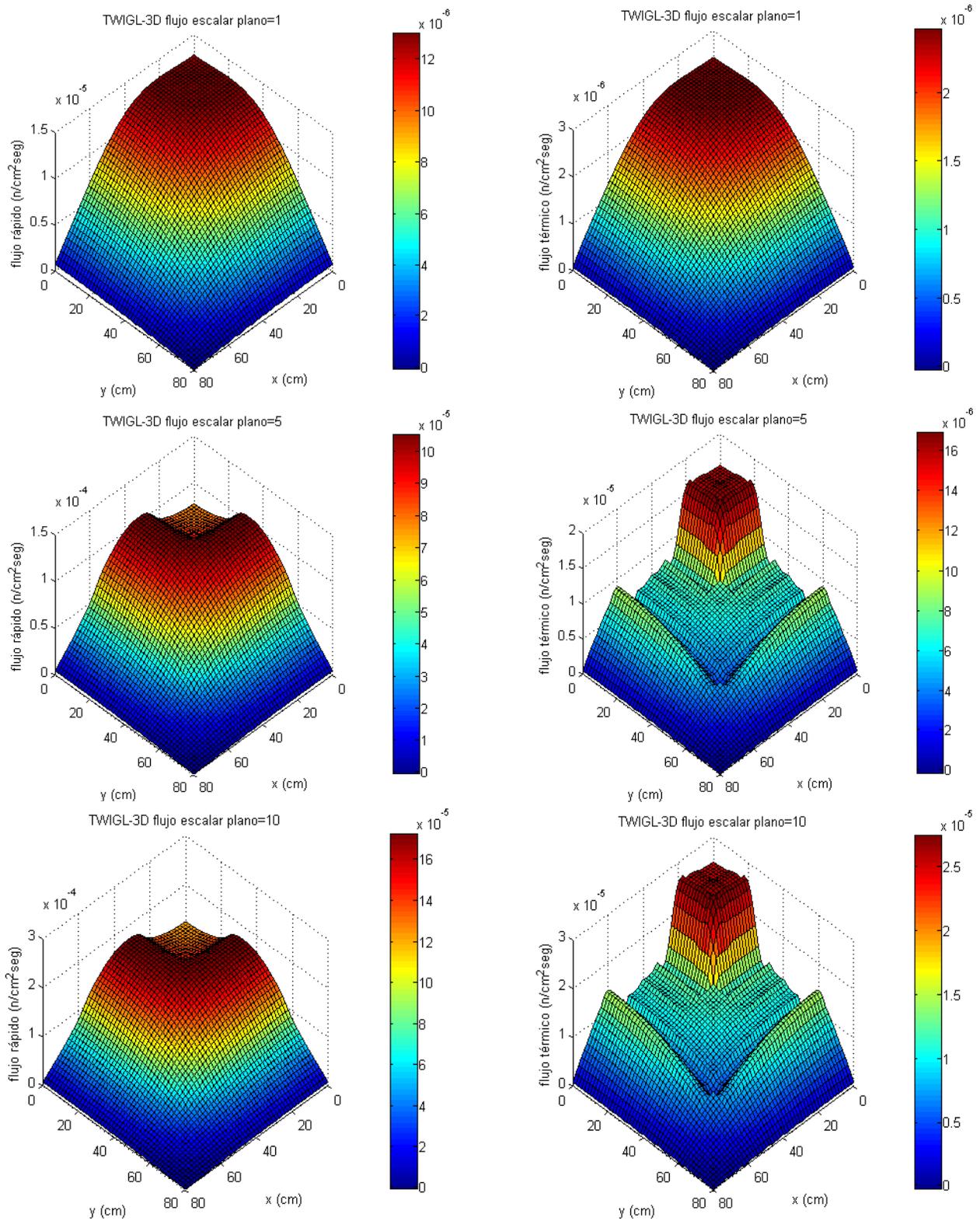


Figura 8.30 Flujo neutrónico TWIGL-3D escalón a $t=0.1$ s.

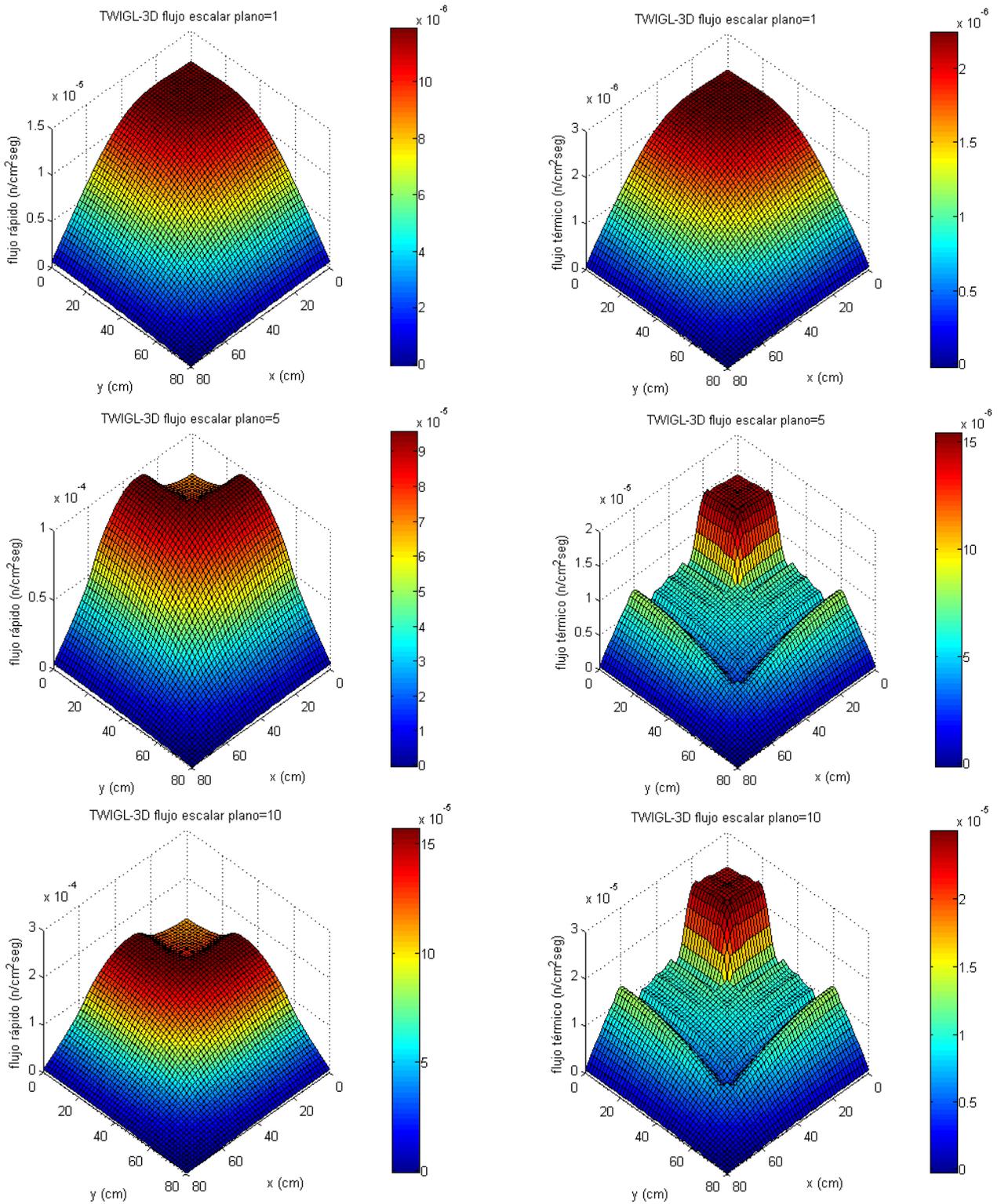


Figura 8.31 Flujo neutrónico TWIGL-3D escalón a $t=0.3$ s.

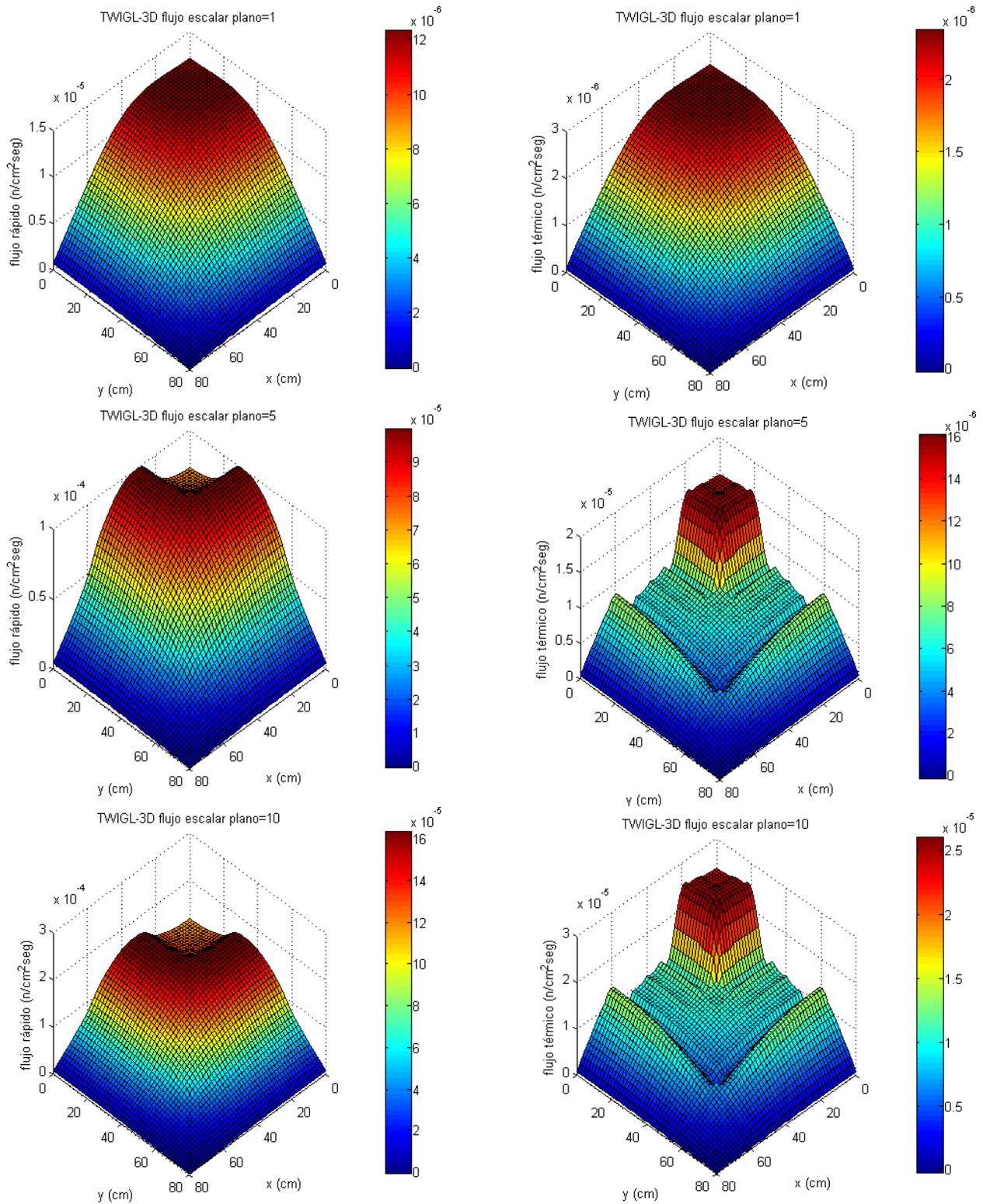


Figura 8.32 Flujo neutrónico TWIGL-3D rampa a $t=0.1$ s.

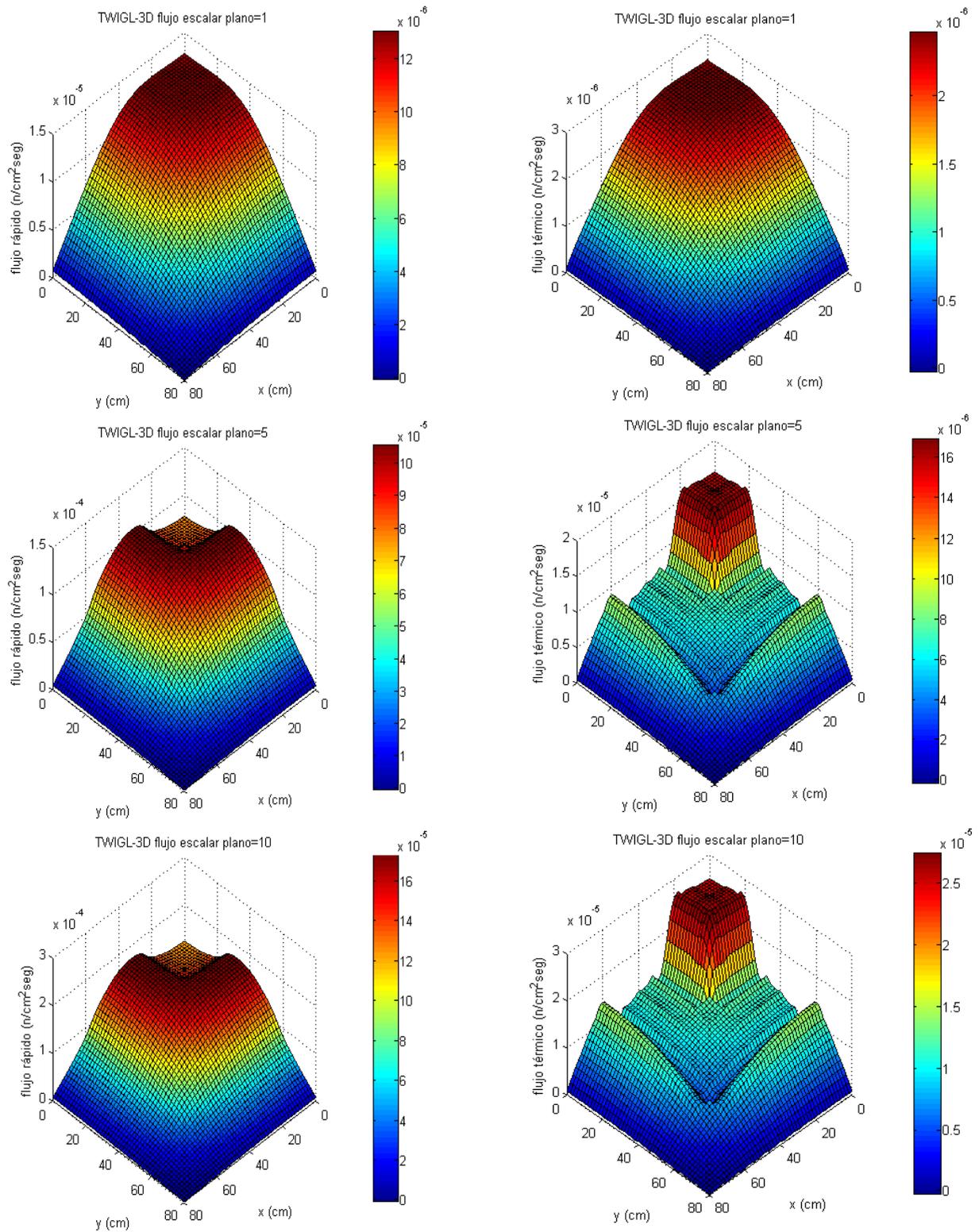


Figura 8.33 Flujo neutrónico TWIGL-3D rampa a t=0.3

Conclusiones

En el trabajo se desarrolló la implementación de la dependencia temporal en el código AZTRAN que está desarrollado en Fortran 95 y se comprobó con problemas de referencia encontrados en la literatura, dado que AZTRAN es un código en tres dimensiones se realizaron problemas para cinética puntual así como en 1, 2 y 3 dimensiones.

La primera prueba que se hizo fue con un problema homogéneo, que tiene solución analítica, donde no existe dependencia espacial, es decir un problema de cinética puntual, al que se denomina 0 dimensional. Los resultados obtenidos con AZTRAN fueron satisfactorios, ya que al compararlos con la solución analítica se pudo observar que éstos coinciden. También se llegó a la conclusión de que como la función de forma no cambia en el tiempo, es más eficaz el algoritmo IQM, ya que resuelve el problema en un tiempo menor significativamente, comparado con el método directo, esto sin perder precisión.

Para la segunda prueba, el caso de una dimensión, se comparó AZTRAN contra los códigos TIMEX, TDA, TNXT que son, al igual que AZTRAN, códigos determinísticos. En los resultados se puede concluir que AZTRAN tiene un buen comportamiento, ya que en las gráficas de potencia normalizada y del flujo escalar, se puede observar que la respuesta del código AZTRAN mantiene la misma forma que los otros códigos. Haciendo una comparación numérica, AZTRAN obtuvo resultados más apegados a los códigos TIMEX y TNXT. En este caso en particular, se tuvieron algunas dificultades, ya que en un principio el código AZTRAN tuvo problemas al resolver el caso de una dimensión en dependencia en tiempo, debido a que el código resolvía el caso de una dimensión partiendo desde una geometría en 3 dimensiones, es decir, aplicando condiciones de frontera reflectivas en el plano yz, por lo que se modificó el código fuente implementando una metodología para el caso de una dimensión, lo cual mejoró significativamente los resultados.

Para el caso en dos dimensiones se hizo una simulación de un problema tipo difusión, llamado TWIGL-2D, donde se compararon los resultados obtenidos con AZTRAN contra dos valores de referencia. Los primeros valores de referencia, son resultados del código ARES, el cual es un código de transporte que utiliza técnicas similares que AZTRAN de discretización, por lo que se compararon con los resultados del código AZTRAN usando la aproximación S_4 . Los segundos valores de referencia, son resultado de una simulación con un código de difusión, llamado aquí simplemente como Referencia, por lo que se compararon con los resultados del código AZTRAN usando la aproximación S_2 . La comparación contra ambos valores de referencia fue satisfactoria, sin embargo se debe resaltar que los resultados contra ARES fueron mejores que la comparación con la Referencia, esto se debe a que, como ya se mencionó anteriormente, ARES tiene similitudes con AZTRAN por lo que una comparación entre ambos códigos resulta más plausible, ya que al comparar con la Referencia, a pesar de usar la aproximación S_2 , se está comparando un código de transporte

Conclusiones

contra uno de difusión, por lo que los resultados son diferentes. Respecto a los tiempos de cómputo se concluye que es recomendable implementar pasos de tiempo adaptativos, ya que a veces al resolver de forma directa era más rápido que al resolver con IQM, ya que en ciertos pasos de tiempo la función de forma tiene cambios significativos, para solucionar esto se utilizaron pasos de tiempo más largos, compensando así el tiempo de cómputo, pero se perdía la precisión, sobre todo en los lapsos donde la función de forma sufre cambios.

El último caso fue un problema en tres dimensiones, sin embargo en la literatura no existen problemas referencia con dependencia en tiempo para transporte a reproducir, por lo que se utilizó la extensión tridimensional del problema TWIGL-2D, con la que se pudo corroborar la resolución de problemas dependientes del tiempo en geometría tridimensional con el código AZTRAN. Para este caso no se contaban con valores de referencia, por lo que se modeló en AZKIND y en AZTRAN el problema, ambos códigos pertenecientes a AZTLAN Platform, teniendo una diferencia menor a 640 pcm entre los resultados de los códigos, sin embargo es importante mencionar que AZKIND es un código de difusión. En relación a los tiempos de cómputo, los calculados usando la IQM fueron más cortos respecto al directo ya que se usaron pasos de tiempo más cortos por eso se observó que la IQM fue más rápida que el directo a diferencia del 2D donde se usaron pasos de tiempo más largos.

En este trabajo, se hizo la implementación de la cinética con dos metodologías, una de forma directa y la otra con la aproximación cuasi-estática mejorada, obteniendo resultados aceptables con ambas metodologías. Se destaca que los resultados con IQM ayuda a reducir los tiempos de cálculo significativamente, aunque se debe prestar especial atención al definir los intervalos de tiempo, ya que esto influye en la precisión de los resultados, por lo que no se recomienda usar intervalos de tiempo muy largos.

Para el método IQM no siempre se garantiza la convergencia de la función de forma y el procedimiento iterativo de la actualización de la función de forma puede llevar mucho tiempo, especialmente cuando hay grandes modificaciones en la función de forma y este procedimiento puede ser muy caro computacionalmente hablando. Esto se comprobó en algunos pasos de tiempo al resolver el problema TWIGL-2D.

Finalmente se puede concluir que AZTRAN puede resolver satisfactoriamente problemas con dependencia en tiempo en varias dimensiones, tanto de forma directa como usando el algoritmo IQM. Esto ayuda a avanzar en los objetivos generales del proyecto AZTLAN Platform, ya que ayuda específicamente a la correcta modernización del código AZTRAN.

Trabajo Futuro

-Para mejorar el tiempo de cómputo de AZTRAN se planea implementar técnicas de aceleración como el método de rebalance de malla gruesa o la difusión sintética para reducir el número de iteraciones internas.

-El esquema nodal utilizado (RTN-0) puede ser sustituido por otro más preciso como el método nodal RTN-1.

-Implementar el llamado paso de tiempo adaptativo para mejorar el rendimiento.

-Optimizar las estrategias de iteración y así como el criterio de convergencia y tolerancia empleadas.

-Incluir la dispersión anisotrópica.

-Incluir factores de discontinuidad que permitirán mejorar la aproximación de los flujos dentro del núcleo.

- La implementación de la simulación de inserción o extracción de barras de control para los transitorios que permitan hacer una simulación más real de los problemas, y ya no usar las perturbaciones tipo escalón o rampa que son más bien problemas académicos.

- Por parte de la plataforma AZTLAN se está desarrollando un código termo-hidráulico llamado AZTHECA que se pretende acoplar al código neutrónico AZTRAN una vez que con ambos se hayan realizado un número suficiente de simulaciones que permitan asegurar que con AZTRAN/AZTHECA se puedan llevar a cabo simulaciones donde se incluyan fenómenos de retroalimentación como el efecto Doppler, formación de vacíos, cambios en la densidad del moderador, etc.

Referencias

- [1] “AZTLAN Platform”, www.aztlanplatform.mx (2016).
 - [2] Armando M. Gómez Torres, Federico Puente Espel, Edmundo del Valle Gallegos, Juan L. François Lacouture, Cecilia Martín del Campo Márquez, Gilberto Espinosa Paredes, “AZTLAN Platform: Plataforma Mexicana para el Análisis y Diseño de Reactores Nucleares”, XXV Congreso Anual de la Sociedad Nuclear Mexicana (2014).
 - [3] Armando M. Gómez Torres, Federico Puente Espel, Edmundo del Valle Gallegos, Juan L. François Lacouture, Cecilia Martín del Campo Márquez, Gilberto Espinosa Paredes, “Mexican Platform for analysis and design of nuclear reactors”, Proceedings of the International Congress on Advances in Nuclear Power Plants ICAPP (2015).
 - [4] Samuel Vargas Escamilla, Guillermo Ibarra Reyes, “AZTRAN 1.0 - AZTLAN TRANSPORT NEUTRONIC CODE: Manual de usuario” (2015).
 - [5] Guillermo Elías Bastida Ortiz, Julio Amhed Vallejo Quintero, Juan Galicia Aragón, Juan Luis François Lacouture, José Vicente Xolocostli Munguía, Andrés Rodríguez Hernández, Armando Miguel Gómez Torres, “Análisis de resultados de los códigos AZTRAN y AZKIND para un BWR”, XXVII Congreso Anual de la Sociedad Nuclear Mexicana (2016).
 - [6] A.F Henry, “Nuclear Reactor Analysis”, MIT Press, Cambridge, Massachusetts (1975).
 - [7] G. I. Bell and S. Glasstone, “Nuclear Reactor Theory”, Van Nostrand Company, New York (1970).
 - [8] E.E. Lewis and W.F. Miller, “Computational Methods of Neutron Transport”, John Wiley & Sons, New York (1984).
 - [9] J. Duderstadt, L. Hamilton, “Nuclear Reactor Analysis”, John Wiley & Sons, Inc., New York (1977).
 - [10] Gustavo Alejandro Aveleyra Monroy, “Solución Numérica de las Ecuaciones de Transporte de Neutrones Dependientes del Tiempo en Geometría Placa Usando los Esquemas Nodales SD₃ y SD₄”, Tesis de Maestría, Instituto Politécnico Nacional (2002).
 - [11] John R. Lamarsh, Anthony J. Baratta, “Introduction to Nuclear Engineering”, Third Edition, Prentice Hall, New Jersey (2001).
 - [12] Dan Gabriel Cacuci, “Handbook of Nuclear Engineering”, Springer (2010).
-

Referencias

- [13] José Vicente Xolocostli Munguía, “Solución de la Ecuación de Transporte en Estado Estacionario, en 1 y 2 Dimensiones para Ensamblados Tipo BWR Usando Métodos Nodales”, Tesis de Maestría, Instituto Politécnico Nacional (2003).
- [14] Edmundo del Valle Gallegos, “Métodos Nodales en Difusión y Transporte de Partículas”, Tesis Doctoral, Instituto Politécnico Nacional (1998).
- [15] Carlos Filio López, “Solución Numérica de la Ecuación de Transporte de Neutrones en Geometría X-Y”, Tesis de Maestría, Instituto Politécnico Nacional (1993).
- [16] Andrés Rodríguez Hernández, “Solución Numérica de las Ecuaciones de la Cinética 3D de Reactores Nucleares Usando el Método Nodal RTN-0”, Tesis de Maestría, Instituto Politécnico Nacional (2002).
- [17] Arturo Delfín Loya, “Solución Numérica de la Ecuación de Transporte de Neutrones Usando Métodos Nodales Discontinuos en Geometría XY”, Tesis de Maestría, Instituto Politécnico Nacional (1996).
- [18] Edmundo del Valle Gallegos, “Informe IIE/13/10045/101/P”, Informe de proyecto (1994).
- [19] P. J. Davis and P. Rabinowitz, *Methods of Numerical Integration*, Academic Press, Inc., London (1984).
- [20] A. Pautz and A. Birkhofer, “DORT-TD: A Transient Neutron Transport Code with Fully Implicit Time Integration”, *Nuclear Science and Engineering*: **145**, 299–319 (2003).
- [21] K.O. Ott and D.A. Meneley, “Accuracy of the Quasi-static Treatment of Spatial Reactor Kinetics”, *Nuclear Science and Engineering*: **36**, 402-411(1958).
- [22] S. Goluoglu and H. L. Dodds, “A Time-Dependent, Three-Dimensional Neutron Transport Methodology”, *Nuclear Science and Engineering*: **139**, 248–261 (2001).
- [23] Sandra Dulla, Ernest H. Mund, Piero Ravetto, “The quasi-static method revisited”, *Progress in Nuclear Energy* **50**, 908–920 (2008).
- [24] P. Picaa, S. Dulla, E.H. Mund, P. Ravetto, G. Marleau, “A quasi-static transport module using the DRAGON code”, *Proceeding of PHYSOR’08, Interlaken, Switzerland* (2008).
- [25] S. Dulla, E. Girardi, P. Guerin, M. Nervo, P. Ravetto, “Neutron Kinetic Calculations using a Quasi-Static Method with the COCAGNE code”, *Transactions of the American Nuclear Society*, **105**, pp. 763-765 (2011).
- [26] C.B. Bentley, “Improvements in a Hybrid Stochastic/Deterministic Method for Transient Three-Dimensional Neutron Transport”, PhD Thesis, University of Tennessee (1996).

- [27] Alan C. Hindmarsh, Krishnan Radhakrishnan, “Description and Use of LSODE, the Livermore Solver for Ordinary Differential Equations”, LLNL report UCRL-ID-113855 (1993).
- [28] James Ernest Banfield, “Semi-implicit direct kinetics methodology for deterministic, time-dependent, three-dimensional, and fine-energy neutron transport solutions”, PhD Thesis, University of Tennessee (2013).
- [29] National Energy Software Center: Benchmark Problem Book, Argonne National Laboratory, ANL-7416, Suppl. No. 3, (1985).
- [30] T. R. Hill, “ONETRAN: A Discrete Ordinates Finite Element Code for the Solution of the One-dimensional Multigroup Transport Equation”, Los Alamos Scientific Laboratory of the University of California (1975).
- [31] W. W. Engle, Jr., “A User manual for ANISN, A One Dimensional Discrete Ordinates Transport Code with Anisotropic Scattering”, K-1693, Computing Technology Center, Oak Ridge Gaseous Diffusion Plant (1967).
- [32] T.R. Hill and W. M. H. Reed, “TIMEX: A Time-Dependent Explicit Discrete Ordinates Program for the Solution of Multigroup Transport Equations with Delayed Neutrons”, LA-6201-MS Los Alamos Scientific Laboratory (1976).
- [33] W. W. Engle, Jr. et al., “One-Dimensional Time Dependent Discrete Ordinates”, Transactions of the American Nuclear Society, **12**, 400 (1969).
- [34] Shun Zhang, Bin Zhang, Penghe Zhang, Hui Yu, and Yixue Chen, “A Nuclear Reactor Transient Methodology Based on Discrete Ordinates Method”, Hindawi Publishing Corporation, Science and Technology of Nuclear Installations, Article ID 491048, 9 pages (Volume 2014).
- [35] Adam J. Hoffman, “A Time-Dependent Method of Characteristics Formulation with Time Derivative Propagation”, Doctoral Thesis, University of Michigan (2013).
- [36] Jess C. Gehin, “A Quasi-Static Polynomial Nodal Method for Nuclear Reactor Analysis”, Doctoral Thesis, Massachusetts Institute of Technology (1992).
- [37] Jurij Kotchoubey, “POLCA-T Neutron Kinetics Model Benchmarking”, Master of Science Thesis, KTH Royal Institute of Technology (1971).
- [38] Donald R. Ferguson, K. F. Hansen, “Solution of the Space-Dependent Reactor Kinetics Equations in Three Dimensions”, Nuclear Science and Engineering, **51**, 189-205 (1973).

Referencias

- [39] Abdallah A. Nahla, Faisal A. Al-Malki, Mahmoud Rokaya, “Numerical Techniques for the Neutron Diffusion Equations in the Nuclear Reactors”, *Adv. Studies Theor. Phys.*, Vol. 6, 2012, **14**, 649-664 (1973).
- [40] Andrés Rodríguez Hernández, Roberto Carlos López Solís, “AZKIND 1.0 - AZTLAN KINETICS IN NEUTRON DIFFUSION: Manual de usuario”, (2015).

APÉNDICE A

En este apéndice se muestra el Archivo de Datos de entrada generado para el Problema TWIGL-3D rampa.

3D-TWIGL (RAMPA)

! Definición de materiales y grupos de energía

! NMA NGR NTB NPMX NPMY NPMZ NPMXR NPMYR NPMZR

3 2 3 4 4 4 4 4 4

! Condiciones de frontera: Left, Right, Near, Far, Bottom, Top

! NLBC NRBC NNBC NFBC NBBC NTBC

1 0 1 0 0 0

! Tipo de problema a resolver 0=medio multiplicativo, 1=fuente externa

0

! Direcciones angulares y uso de cuadraturas internas o externas

2 0

! Potencia de normalización

1.0

! Uso de rebalance 0=deshabilitado, 1=habilitado, Tipo problema a resolver 0=estático

! 1=estático+transitorio, -1=transitorio

1

! Metodología para resolver la dependencia en tiempo, 0=directo, 1=IQM

1

! Definición de la malla dirección x

3 4 3

! Definición puntos de la malla x

0.0

24.0

56.0

80.0

! Definición de la malla dirección y

3 4 3

! Definición puntos de la malla y

0.0

24.0

56.0

80.0

Apéndice A

! Definición de la malla dirección z

3 14 3

! Definición puntos de la malla z

0.0

24.0

136.0

160.0

! Definición malla de rebalance estático

1 4 8 11

1 4 8 11

1 4 18 21

! Mapa de distribución de tipo de barra

3 3 3

2 1 3

3 2 3

! Elemento tipo barra

1

3 1 3

2

3 2 3

3

3 3 3

0

! Número máximo de iteraciones internas y externas

500 500

! Tolerancias para la convergencia de iteraciones internas y externas

1.0e-08 1.0e-07

! Información nuclear: secciones eficaces de los materiales

! Material 1

0.238095 0.833333

0.0084 0.24

0.0084 0.24

1.0 0.0

1.0 0.0

0.218095 0.01 0.0 0.683333

0.0 0.0

```

! Material 2
0.238095 0.833333
0.0084 0.24
0.0084 0.24
1.0 0.0
1.0 0.0
0.218095 0.01 0.0 0.683333
0.0 0.0
  
```

```

! Material 3
0.25461 0.666667
0.0036 0.072
0.0036 0.072
1.0 0.0
1.0 0.0
0.23661 0.01 0.0 0.616667
0.0 0.0
  
```

```

! Información de los datos cinéticos
  
```

```

! NPC NPMT NTBT REG_BALT
  
```

```

  1  2  1  0
  
```

```

! NPERT NPERS NPERF
  
```

```

  2  2  2
  
```

```

! MT (número de intervalos que subdividen malla macro-pasos)
  
```

```

300
  
```

```

! MIQM (número de intervalos que subdividen malla micro-pasos)
  
```

```

100
  
```

```

! IMPT (puntos de impresión)
  
```

```

1
  
```

```

! TM (intervalo de tiempo)
  
```

```

0.0 0.3
  
```

```

! Malla de rebalance en tiempo
  
```

```

4 4 4
  
```

```

1 4 8 11
  
```

```

1 4 8 11
  
```

```

1 4 18 21
  
```

Apéndice A

! P (5,7): Información del tipo de perturbación

0.0 0.0 0.0 0.0 0.0

0.0 -0.0225 0.0 0.0 0.2

0.0 0.0 0.0 0.0 0.0

0.0 -0.0225 0.0 0.0 0.2

0.0 0.0 0.0 0.0 0.0

0.0 0.0 0.0 0.0 0.0

! Recíprocos de las velocidades de los neutrones (s/cm)

1.0e-7 5.0e-6

! Constantes de decaimiento (1/s)

0.08

! Fracción de neutrones retardados

0.0075

! Valor theta de flujo de neutrones

1.0

! Valor theta de precursores

1.0

! Indicador del grupo donde cambiarán las secciones eficaces

0,1

! Tipo de barra afectada y delimitación de la zona afectada

1 4 8 4 8

! 5 ceros para leer otro tipo de información

0 0 0 0 0

! Número de barra perturbada

1

! Tipo de perturbación y localización axial

2 4 18

! 3 ceros para leer otra barra perturbada

0 0 0

! 1 cero para leer otro tipo de información

0

! Número de iteraciones y tolerancia para la convergencia del avance en tiempo

1000,1.0e-06

APÉNDICE B

En este apéndice se proporciona el listado correspondiente al archivo de salida obtenido para la simulación del Problema TWIGL-3D rampa.

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
ESCUELA SUPERIOR DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE TRANSPORTE EN GEOMETRÍA
CARTESIANA USANDO EL MÉTODO NODAL RTN-0

AUTORES: EDMUNDO DEL VALLE GALLEGOS
ARMANDO MIGUEL GÓMEZ TORRES
DURAN GONZALEZ JULIAN ARTURO

PROYECTO AZTLAN PLATFORM
MEXICO, 2016

* FECHA: 15 SEP 2016 11:23:39 *

* NOMBRE DEL PROBLEMA: 3D-TWIGL (RAMPA) *

* DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA *

PARÁMETROS DE ITERACIÓN PARA LA SOLUCIÓN:

NÚMERO MÁXIMO DE ITERACIONES INTERNAS.....= 500
NÚMERO MÁXIMO DE INTERACIONES EXTERNAS.....= 500
ERROR RELATIVO MÁXIMO PARA LAS ITERACIONES INTERNAS.....= 1.000E-08
ERROR RELATIVO MÁXIMO PARA LAS ITERACIONES EXTERNAS.....= 1.000E-07

Apéndice B

INFORMACIÓN GEOMÉTRICA:

NÚMERO DE PUNTOS EN LA MALLA EN LA DIRECCION X: 11
CONDICIÓN DE FRONTERA EN LA CARA IZQUIERDA: 1
CONDICIÓN DE FRONTERA EN LA CARA DERECHA: 0
NÚMERO DE PUNTOS EN LA MALLA EN LA DIRECCION Y: 11
CONDICIÓN DE FRONTERA EN LA CARA CERCANA: 1
CONDICIÓN DE FRONTERA EN LA CARA LEJANA: 0
NÚMERO DE PUNTOS EN LA MALLA EN LA DIRECCION Z: 21
CONDICIÓN DE FRONTERA EN LA CARA INFERIOR: 0
CONDICIÓN DE FRONTERA EN LA CARA SUPERIOR: 0

MAPA DE DISTRIBUCIÓN DE LOS ELEMENTOS BARRA:

```
3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
2 2 2 1 1 1 1 3 3 3
2 2 2 1 1 1 1 3 3 3
2 2 2 1 1 1 1 3 3 3
2 2 2 1 1 1 1 3 3 3
3 3 3 2 2 2 2 3 3 3
3 3 3 2 2 2 2 3 3 3
3 3 3 2 2 2 2 3 3 3
```

DISTRIBUCIÓN DE LOS MATERIALES PARA CADA PLANO XY

MAPA DE MATERIALES EN EL PLANO: 1

```
3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
```

MAPA DE MATERIALES EN EL PLANO: 2

3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
3 3 3 3 3 3 3 3 3 3

MAPA DE MATERIALES EN EL PLANO: 3

3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
3 3 3 3 3 3 3 3 3 3

MAPA DE MATERIALES EN EL PLANO: 4

3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
2 2 2 1 1 1 1 3 3 3
2 2 2 1 1 1 1 3 3 3
2 2 2 1 1 1 1 3 3 3
2 2 2 1 1 1 1 3 3 3
3 3 3 2 2 2 2 3 3 3
3 3 3 2 2 2 2 3 3 3
3 3 3 2 2 2 2 3 3 3

MAPA DE MATERIALES EN EL PLANO: 5

3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
2 2 2 1 1 1 1 3 3 3
2 2 2 1 1 1 1 3 3 3
2 2 2 1 1 1 1 3 3 3
2 2 2 1 1 1 1 3 3 3
3 3 3 2 2 2 2 3 3 3
3 3 3 2 2 2 2 3 3 3
3 3 3 2 2 2 2 3 3 3

MAPA DE MATERIALES EN EL PLANO: 6

3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
2 2 2 1 1 1 1 3 3 3
2 2 2 1 1 1 1 3 3 3
2 2 2 1 1 1 1 3 3 3
2 2 2 1 1 1 1 3 3 3
3 3 3 2 2 2 2 3 3 3
3 3 3 2 2 2 2 3 3 3
3 3 3 2 2 2 2 3 3 3

MAPA DE MATERIALES EN EL PLANO: 7

3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
2 2 2 1 1 1 1 3 3 3
2 2 2 1 1 1 1 3 3 3
2 2 2 1 1 1 1 3 3 3
2 2 2 1 1 1 1 3 3 3
3 3 3 2 2 2 2 3 3 3
3 3 3 2 2 2 2 3 3 3
3 3 3 2 2 2 2 3 3 3

MAPA DE MATERIALES EN EL PLANO: 8

3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
2 2 2 1 1 1 1 3 3 3
2 2 2 1 1 1 1 3 3 3
2 2 2 1 1 1 1 3 3 3
2 2 2 1 1 1 1 3 3 3
3 3 3 2 2 2 2 3 3 3
3 3 3 2 2 2 2 3 3 3
3 3 3 2 2 2 2 3 3 3

MAPA DE MATERIALES EN EL PLANO: 9

3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
2 2 2 1 1 1 1 3 3 3
2 2 2 1 1 1 1 3 3 3
2 2 2 1 1 1 1 3 3 3
2 2 2 1 1 1 1 3 3 3
3 3 3 2 2 2 2 3 3 3
3 3 3 2 2 2 2 3 3 3
3 3 3 2 2 2 2 3 3 3

MAPA DE MATERIALES EN EL PLANO: 10

3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
2 2 2 1 1 1 1 3 3 3
2 2 2 1 1 1 1 3 3 3
2 2 2 1 1 1 1 3 3 3
2 2 2 1 1 1 1 3 3 3
3 3 3 2 2 2 2 3 3 3
3 3 3 2 2 2 2 3 3 3
3 3 3 2 2 2 2 3 3 3

MAPA DE MATERIALES EN EL PLANO: 11

3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
2 2 2 1 1 1 1 3 3 3
2 2 2 1 1 1 1 3 3 3
2 2 2 1 1 1 1 3 3 3
2 2 2 1 1 1 1 3 3 3
3 3 3 2 2 2 2 3 3 3
3 3 3 2 2 2 2 3 3 3
3 3 3 2 2 2 2 3 3 3

MAPA DE MATERIALES EN EL PLANO: 12

3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
2 2 2 1 1 1 1 3 3 3
2 2 2 1 1 1 1 3 3 3
2 2 2 1 1 1 1 3 3 3
2 2 2 1 1 1 1 3 3 3
3 3 3 2 2 2 2 3 3 3
3 3 3 2 2 2 2 3 3 3
3 3 3 2 2 2 2 3 3 3

MAPA DE MATERIALES EN EL PLANO: 13

3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
2 2 2 1 1 1 1 3 3 3
2 2 2 1 1 1 1 3 3 3
2 2 2 1 1 1 1 3 3 3
2 2 2 1 1 1 1 3 3 3
3 3 3 2 2 2 2 3 3 3
3 3 3 2 2 2 2 3 3 3
3 3 3 2 2 2 2 3 3 3

MAPA DE MATERIALES EN EL PLANO: 14

3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
2 2 2 1 1 1 1 3 3 3
2 2 2 1 1 1 1 3 3 3
2 2 2 1 1 1 1 3 3 3
2 2 2 1 1 1 1 3 3 3
3 3 3 2 2 2 2 3 3 3
3 3 3 2 2 2 2 3 3 3
3 3 3 2 2 2 2 3 3 3

MAPA DE MATERIALES EN EL PLANO: 15

3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
2 2 2 1 1 1 1 3 3 3
2 2 2 1 1 1 1 3 3 3
2 2 2 1 1 1 1 3 3 3
2 2 2 1 1 1 1 3 3 3
3 3 3 2 2 2 2 3 3 3
3 3 3 2 2 2 2 3 3 3
3 3 3 2 2 2 2 3 3 3

MAPA DE MATERIALES EN EL PLANO: 16

3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
2 2 2 1 1 1 1 3 3 3
2 2 2 1 1 1 1 3 3 3
2 2 2 1 1 1 1 3 3 3
2 2 2 1 1 1 1 3 3 3
3 3 3 2 2 2 2 3 3 3
3 3 3 2 2 2 2 3 3 3
3 3 3 2 2 2 2 3 3 3

MAPA DE MATERIALES EN EL PLANO: 17

3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
2 2 2 1 1 1 1 3 3 3
2 2 2 1 1 1 1 3 3 3
2 2 2 1 1 1 1 3 3 3
2 2 2 1 1 1 1 3 3 3
3 3 3 2 2 2 2 3 3 3
3 3 3 2 2 2 2 3 3 3
3 3 3 2 2 2 2 3 3 3

MAPA DE MATERIALES EN EL PLANO: 18

3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
3 3 3 3 3 3 3 3 3 3

MAPA DE MATERIALES EN EL PLANO: 19

3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
3 3 3 3 3 3 3 3 3 3

MAPA DE MATERIALES EN EL PLANO: 20

```

3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
3 3 3 3 3 3 3 3 3 3

```

MALLA EN LA DIRECCIÓN X:

PUNTO	VALOR-X
1	0.0000E+00
2	0.8000E+01
3	0.1600E+02
4	0.2400E+02
5	0.3200E+02
6	0.4000E+02
7	0.4800E+02
8	0.5600E+02
9	0.6400E+02
10	0.7200E+02
11	0.8000E+02

MALLA EN LA DIRECCIÓN Y:

PUNTO	VALOR-Y
1	0.0000E+00
2	0.8000E+01
3	0.1600E+02
4	0.2400E+02
5	0.3200E+02
6	0.4000E+02

Apéndice B

7	0.4800E+02
8	0.5600E+02
9	0.6400E+02
10	0.7200E+02
11	0.8000E+02

MALLA EN LA DIRECCIÓN Z:

PUNTO	VALOR-Z
1	0.0000E+00
2	0.8000E+01
3	0.1600E+02
4	0.2400E+02
5	0.3200E+02
6	0.4000E+02
7	0.4800E+02
8	0.5600E+02
9	0.6400E+02
10	0.7200E+02
11	0.8000E+02
12	0.8800E+02
13	0.9600E+02
14	0.1040E+03
15	0.1120E+03
16	0.1200E+03
17	0.1280E+03
18	0.1360E+03
19	0.1440E+03
20	0.1520E+03
21	0.1600E+03

 * INFORMACIÓN DE LAS SECCIONES EFICACES *

MATERIAL: 1

G	ST	NF	KF	XP	Q
1	2.3810E-01	8.4000E-03	8.4000E-03	1.0000E+00	0.0000E+00
2	8.3333E-01	2.4000E-01	2.4000E-01	0.0000E+00	0.0000E+00

SS(GP--->G)

GP--->

1 2

1	2.1810E-01	0.0000E+00
2	1.0000E-02	6.8333E-01

MATERIAL: 2

G	ST	NF	KF	XP	Q
1	2.3810E-01	8.4000E-03	8.4000E-03	1.0000E+00	0.0000E+00
2	8.3333E-01	2.4000E-01	2.4000E-01	0.0000E+00	0.0000E+00

SS(GP--->G)

GP--->

1 2

1	2.1810E-01	0.0000E+00
2	1.0000E-02	6.8333E-01

Apéndice B

MATERIAL: 3

G	ST	NF	KF	XP	Q
1	2.5461E-01	3.6000E-03	3.6000E-03	1.0000E+00	0.0000E+00
2	6.6667E-01	7.2000E-02	7.2000E-02	0.0000E+00	0.0000E+00

SS(GP--->G)

GP--->

1 2

1	2.3661E-01	0.0000E+00
2	1.0000E-02	6.1667E-01

* SOLUCIÓN DEL PROBLEMA CON LA APROXIMACIÓN ANGULAR S2 *

ANGULAR DIRECTIONS MU, NU, ETA AND WEIGTHS WP:

K	MU(K)	NU(K)	ETA(K)	WP(K)
1	5.77350269E-01	5.77350269E-01	5.77350269E-01	1.25000000E-01

* REBALANCE ACTIVADO *

* PROCESO ITERATIVO *

 * FLUJO DIRECTO *

 * FACTOR DE MULTIPLICACIÓN EFECTIVO: 1.06736648E+00 *

 * FLUJOS NEUTRONICOS *

FLUJO DE NEUTRONES PROMEDIO RADIAL EN CADA PLANO XY Y GRUPO DE ENERGÍA

PLANO	FLUJO NEUTRONICO POR GRUPO	
	1	2
20	5.988E-06	1.131E-06
19	1.442E-05	2.836E-06
18	2.455E-05	4.286E-06
17	3.693E-05	4.217E-06
16	4.810E-05	5.246E-06
15	5.790E-05	6.282E-06
14	6.611E-05	7.165E-06
13	7.247E-05	7.853E-06
12	7.682E-05	8.324E-06
11	7.902E-05	8.562E-06
10	7.902E-05	8.562E-06
9	7.682E-05	8.324E-06
8	7.247E-05	7.853E-06
7	6.611E-05	7.165E-06
6	5.790E-05	6.282E-06
5	4.810E-05	5.246E-06
4	3.693E-05	4.217E-06
3	2.455E-05	4.286E-06
2	1.442E-05	2.836E-06
1	5.988E-06	1.131E-06

Apéndice B

FLUJO DE NEUTRONES PROMEDIO AXIAL POR GRUPO DE ENERGÍA

FLUJO NEUTRONICO PARA EL GRUPO DE ENERGÍA: 1

1.130E-05 1.105E-05 1.054E-05 9.749E-06 8.692E-06 7.400E-06 5.943E-06 4.385E-06
2.805E-06 1.239E-06
2.716E-05 2.657E-05 2.537E-05 2.352E-05 2.099E-05 1.783E-05 1.422E-05 1.042E-05
6.557E-06 2.805E-06
4.619E-05 4.526E-05 4.333E-05 4.030E-05 3.607E-05 3.064E-05 2.416E-05 1.708E-05
1.042E-05 4.385E-06
6.891E-05 6.767E-05 6.506E-05 6.082E-05 5.470E-05 4.659E-05 3.647E-05 2.416E-05
1.422E-05 5.943E-06
8.506E-05 8.389E-05 8.121E-05 7.654E-05 6.939E-05 5.946E-05 4.659E-05 3.064E-05
1.783E-05 7.400E-06
9.350E-05 9.295E-05 9.113E-05 8.709E-05 8.009E-05 6.939E-05 5.470E-05 3.607E-05
2.099E-05 8.692E-06
9.284E-05 9.329E-05 9.363E-05 9.240E-05 8.709E-05 7.654E-05 6.082E-05 4.030E-05
2.352E-05 9.749E-06
8.164E-05 8.298E-05 8.683E-05 9.363E-05 9.113E-05 8.121E-05 6.506E-05 4.333E-05
2.537E-05 1.054E-05
7.448E-05 7.676E-05 8.298E-05 9.329E-05 9.295E-05 8.389E-05 6.767E-05 4.526E-05
2.657E-05 1.105E-05
7.161E-05 7.448E-05 8.164E-05 9.284E-05 9.350E-05 8.506E-05 6.891E-05 4.619E-05
2.716E-05 1.130E-05

FLUJO NEUTRONICO PARA EL GRUPO DE ENERGÍA: 2

2.134E-06 2.087E-06 1.990E-06 1.842E-06 1.642E-06 1.399E-06 1.123E-06 8.277E-07
5.271E-07 2.177E-07
5.310E-06 5.196E-06 4.961E-06 4.599E-06 4.107E-06 3.495E-06 2.799E-06 2.053E-06
1.298E-06 5.271E-07
7.615E-06 7.460E-06 7.140E-06 6.638E-06 5.942E-06 5.060E-06 4.081E-06 3.200E-06
2.053E-06 8.277E-07
5.696E-06 5.592E-06 5.374E-06 5.021E-06 4.518E-06 3.870E-06 3.234E-06 4.081E-06
2.799E-06 1.123E-06
6.543E-06 6.451E-06 6.242E-06 5.879E-06 5.332E-06 4.598E-06 3.870E-06 5.060E-06
3.495E-06 1.399E-06

7.225E-06 7.175E-06 7.016E-06 6.664E-06 6.118E-06 5.332E-06 4.518E-06 5.942E-06
4.107E-06 1.642E-06
7.867E-06 7.882E-06 7.762E-06 7.168E-06 6.664E-06 5.879E-06 5.021E-06 6.638E-06
4.599E-06 1.842E-06
1.405E-05 1.421E-05 1.337E-05 7.762E-06 7.016E-06 6.242E-06 5.374E-06 7.140E-06
4.961E-06 1.990E-06
1.478E-05 1.508E-05 1.421E-05 7.882E-06 7.175E-06 6.451E-06 5.592E-06 7.460E-06
5.196E-06 2.087E-06
1.439E-05 1.478E-05 1.405E-05 7.867E-06 7.225E-06 6.543E-06 5.696E-06 7.615E-06
5.310E-06 2.134E-06

* FLUJO ADJUNTO *

* FACTOR DE MULTIPLICACIÓN EFECTIVA: 1.06736653E+00 *

* RESUMEN *

NOMBRE DEL PROBLEMA: 3D-TWIGL (RAMPA)

NÚMERO TOTAL DE MATERIALES: 3

NÚMERO TOTAL DE ELEMENTOS DE BARRA: 3

NÚMERO DE GRUPOS DE ENERGÍA: 2

NÚMERO TOTAL DE ELEMENTOS (NODOS): 2000

NÚMERO TOTAL DE PUNTOS EN LA MALLA EN X: 11

NÚMERO TOTAL DE PUNTOS EN LA MALLA EN Y: 11

NÚMERO TOTAL DE PUNTOS EN LA MALLA EN Z: 21

Apéndice B

NÚMERO TOTAL DE NODOS EN X: 10

NÚMERO TOTAL DE NODOS EN Y: 10

NÚMERO TOTAL DE NODOS EN Z: 20

NÚMERO DE CORTES PRINCIPALES EN X: 4

NÚMERO DE CORTES PRINCIPALES EN Y: 4

NÚMERO DE CORTES PRINCIPALES EN Z: 4

* DATOS CINETICOS *

VELOCIDADES DE LOS NEUTRONES EN CADA GRUPO DE ENERGÍA

GRUPO VELOCIDAD

G	V
1	1.0000000E+07
2	2.0000000E+05

CONSTANTES DE DECAIMIENTO Y VALORES DE LAS BETAS

GRUPO	BETA(I)	LAMBDA(I)
I	BETA	LAMDA
1	7.5000000E-03	8.0000000E-02

BETA TOTAL= 7.499999999999997E-003

PARAMETROS DE ITERACIONES PARA DETERMINAR LOS FLUJOS

NÚMERO MÁXIMO DE ITERACIONES INTERNAS = 500

ERROR MÁXIMO RELATIVO PARA LAS ITERACIONES INTERNAS = 1.000E-06

DESCRIPCIÓN DEL TRANSITORIO

MALLA EN LA DIRECCIÓN T

INT.	[TM(J),TM(J+1)]	N. PASOS	DT(SEGS.)
1	0.0000E+00 3.0000E-01	300	1.0000E-03

1 PASOS ENTRE IMPRESIONES

2 TIPOS DE PERTURBACIÓN POR REACTIVIDAD EN LA S.TOTAL

2 TIPOS DE PERTURBACIÓN POR REACTIVIDAD EN LA S.DISPERSION

2 TIPOS DE PERTURBACIÓN POR REACTIVIDAD EN LA S.FISION

TIPOS DE INSERCIÓN DE REACTIVIDAD EN LAS SECCIONES

- 1 INSERCIÓN EN ESCALÓN
- 2 INSERCIÓN EN RAMPA
- 3 INSERCIÓN CUADRATICA
- 4 INSERCIÓN SENOIDAL
- 5 INSERCIÓN COSENOIDAL
- 6 INSERCIÓN EXPONENCIAL
- 7 INSERCIÓN EN ESCALÓN

NÚMERO DE BARRAS PERTURBADAS: 1

CAMBIO EN LAS SECCIONES EFICACES DEL GRUPO: 2

MAPA DE CAMBIOS EN LAS SECCIONES EFICACES

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 1 1 1 1 0 0 0
0 0 0 1 1 1 1 0 0 0
0 0 0 1 1 1 1 0 0 0
0 0 0 1 1 1 1 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

PARAMETROS THETA DE INTEGRACIÓN

THETA DEL FLUJO ANGULAR = 1.0

THETA DEL PRECURSOR (1) = 1.0

RESULTADOS DE LA POTENCIA NORMALIZADA EN FUNCIÓN DEL TIEMPO

TIEMPO	AMPLITUD	REACT	ITIN
0.00000000E+00	1.000000E+00	0.0000E+00	0
1.00000000E-03	1.000042E+00	3.4971E-06	1
2.00000000E-03	1.000159E+00	6.9943E-06	1
3.00000000E-03	1.000338E+00	1.0491E-05	1
4.00000000E-03	1.000568E+00	1.3989E-05	1
5.00000000E-03	1.000840E+00	1.7486E-05	1
6.00000000E-03	1.001146E+00	2.0984E-05	1
7.00000000E-03	1.001481E+00	2.4481E-05	1
8.00000000E-03	1.001839E+00	2.7979E-05	1
9.00000000E-03	1.002217E+00	3.1477E-05	2
1.00000000E-02	1.002610E+00	3.4975E-05	1
1.10000000E-02	1.003017E+00	3.8474E-05	2
1.20000000E-02	1.003435E+00	4.1972E-05	1
1.30000000E-02	1.003862E+00	4.5471E-05	2
1.40000000E-02	1.004297E+00	4.8970E-05	1
1.50000000E-02	1.004738E+00	5.2469E-05	2
1.60000000E-02	1.005185E+00	5.5969E-05	2

1.70000000E-02	1.005636E+00	5.9467E-05	1
1.80000000E-02	1.006090E+00	6.2967E-05	2
1.90000000E-02	1.006548E+00	6.6468E-05	2
2.00000000E-02	1.007009E+00	6.9967E-05	1
2.10000000E-02	1.007471E+00	7.3468E-05	2
2.20000000E-02	1.007936E+00	7.6969E-05	2
2.30000000E-02	1.008403E+00	8.0469E-05	1
2.40000000E-02	1.008871E+00	8.3970E-05	2
2.50000000E-02	1.009340E+00	8.7472E-05	2
2.60000000E-02	1.009811E+00	9.0972E-05	1
2.70000000E-02	1.010282E+00	9.4474E-05	2
2.80000000E-02	1.010755E+00	9.7976E-05	2
2.90000000E-02	1.011228E+00	1.0148E-04	1
3.00000000E-02	1.011702E+00	1.0498E-04	2
3.10000000E-02	1.012177E+00	1.0848E-04	2
3.20000000E-02	1.012653E+00	1.1198E-04	1
3.30000000E-02	1.013130E+00	1.1549E-04	2
3.40000000E-02	1.013607E+00	1.1899E-04	2
3.50000000E-02	1.014084E+00	1.2249E-04	1
3.60000000E-02	1.014563E+00	1.2600E-04	2
3.70000000E-02	1.015042E+00	1.2950E-04	2
3.80000000E-02	1.015521E+00	1.3301E-04	1
3.90000000E-02	1.016001E+00	1.3651E-04	2
4.00000000E-02	1.016482E+00	1.4002E-04	2
4.10000000E-02	1.016963E+00	1.4352E-04	1
4.20000000E-02	1.017444E+00	1.4703E-04	2
4.30000000E-02	1.017926E+00	1.5053E-04	2
4.40000000E-02	1.018409E+00	1.5404E-04	1
4.50000000E-02	1.018892E+00	1.5754E-04	2
4.60000000E-02	1.019376E+00	1.6105E-04	2
4.70000000E-02	1.019860E+00	1.6455E-04	1
4.80000000E-02	1.020345E+00	1.6806E-04	2
4.90000000E-02	1.020831E+00	1.7157E-04	2
5.00000000E-02	1.021316E+00	1.7507E-04	1
5.10000000E-02	1.021803E+00	1.7858E-04	2
5.20000000E-02	1.022290E+00	1.8209E-04	2
5.30000000E-02	1.022777E+00	1.8560E-04	1
5.40000000E-02	1.023265E+00	1.8911E-04	2
5.50000000E-02	1.023754E+00	1.9261E-04	1

Apéndice B

5.60000000E-02	1.024243E+00	1.9612E-04	2
5.70000000E-02	1.024732E+00	1.9963E-04	2
5.80000000E-02	1.025223E+00	2.0314E-04	1
5.90000000E-02	1.025713E+00	2.0665E-04	2
6.00000000E-02	1.026204E+00	2.1016E-04	1
6.10000000E-02	1.026696E+00	2.1367E-04	2
6.20000000E-02	1.027189E+00	2.1718E-04	2
6.30000000E-02	1.027681E+00	2.2069E-04	1
6.40000000E-02	1.028175E+00	2.2420E-04	2
6.50000000E-02	1.028669E+00	2.2771E-04	1
6.60000000E-02	1.029163E+00	2.3122E-04	2
6.70000000E-02	1.029658E+00	2.3473E-04	2
6.80000000E-02	1.030153E+00	2.3824E-04	1
6.90000000E-02	1.030649E+00	2.4176E-04	2
7.00000000E-02	1.031146E+00	2.4527E-04	1
7.10000000E-02	1.031643E+00	2.4878E-04	2
7.20000000E-02	1.032141E+00	2.5229E-04	1
7.30000000E-02	1.032639E+00	2.5580E-04	2
7.40000000E-02	1.033138E+00	2.5932E-04	2
7.50000000E-02	1.033637E+00	2.6283E-04	1
7.60000000E-02	1.034137E+00	2.6635E-04	2
7.70000000E-02	1.034638E+00	2.6986E-04	1
7.80000000E-02	1.035139E+00	2.7337E-04	2
7.90000000E-02	1.035640E+00	2.7688E-04	1
8.00000000E-02	1.036142E+00	2.8040E-04	2
8.10000000E-02	1.036645E+00	2.8391E-04	1
8.20000000E-02	1.037148E+00	2.8743E-04	2
8.30000000E-02	1.037652E+00	2.9094E-04	1
8.40000000E-02	1.038156E+00	2.9446E-04	2
8.50000000E-02	1.038661E+00	2.9797E-04	1
8.60000000E-02	1.039167E+00	3.0149E-04	2
8.70000000E-02	1.039673E+00	3.0500E-04	1
8.80000000E-02	1.040179E+00	3.0852E-04	2
8.90000000E-02	1.040686E+00	3.1204E-04	1
9.00000000E-02	1.041194E+00	3.1556E-04	2
9.10000000E-02	1.041702E+00	3.1907E-04	1
9.20000000E-02	1.042211E+00	3.2259E-04	2
9.30000000E-02	1.042721E+00	3.2611E-04	1
9.40000000E-02	1.043231E+00	3.2963E-04	2

9.50000000E-02	1.043741E+00	3.3314E-04	1
9.60000000E-02	1.044252E+00	3.3666E-04	2
9.70000000E-02	1.044764E+00	3.4018E-04	1
9.80000000E-02	1.045276E+00	3.4370E-04	2
9.90000000E-02	1.045789E+00	3.4722E-04	1
1.00000000E-01	1.046303E+00	3.5074E-04	2
1.01000000E-01	1.046817E+00	3.5426E-04	1
1.02000000E-01	1.047331E+00	3.5778E-04	2
1.03000000E-01	1.047846E+00	3.6130E-04	1
1.04000000E-01	1.048362E+00	3.6482E-04	2
1.05000000E-01	1.048878E+00	3.6834E-04	1
1.06000000E-01	1.049395E+00	3.7186E-04	2
1.07000000E-01	1.049913E+00	3.7538E-04	1
1.08000000E-01	1.050431E+00	3.7891E-04	2
1.09000000E-01	1.050949E+00	3.8242E-04	1
1.10000000E-01	1.051468E+00	3.8595E-04	2
1.11000000E-01	1.051988E+00	3.8947E-04	1
1.12000000E-01	1.052509E+00	3.9300E-04	2
1.13000000E-01	1.053030E+00	3.9651E-04	1
1.14000000E-01	1.053551E+00	4.0004E-04	2
1.15000000E-01	1.054073E+00	4.0356E-04	1
1.16000000E-01	1.054596E+00	4.0709E-04	2
1.17000000E-01	1.055119E+00	4.1061E-04	1
1.18000000E-01	1.055643E+00	4.1414E-04	2
1.19000000E-01	1.056168E+00	4.1766E-04	1
1.20000000E-01	1.056693E+00	4.2119E-04	2
1.21000000E-01	1.057219E+00	4.2471E-04	1
1.22000000E-01	1.057745E+00	4.2824E-04	2
1.23000000E-01	1.058272E+00	4.3176E-04	1
1.24000000E-01	1.058800E+00	4.3529E-04	2
1.25000000E-01	1.059328E+00	4.3881E-04	1
1.26000000E-01	1.059856E+00	4.4234E-04	2
1.27000000E-01	1.060386E+00	4.4586E-04	1
1.28000000E-01	1.060916E+00	4.4940E-04	2
1.29000000E-01	1.061446E+00	4.5292E-04	1
1.30000000E-01	1.061977E+00	4.5645E-04	2
1.31000000E-01	1.062509E+00	4.5997E-04	1
1.32000000E-01	1.063041E+00	4.6351E-04	2
1.33000000E-01	1.063574E+00	4.6703E-04	1

Apéndice B

1.34000000E-01	1.064108E+00	4.7056E-04	2
1.35000000E-01	1.064642E+00	4.7409E-04	1
1.36000000E-01	1.065177E+00	4.7762E-04	2
1.37000000E-01	1.065712E+00	4.8115E-04	1
1.38000000E-01	1.066248E+00	4.8468E-04	2
1.39000000E-01	1.066785E+00	4.8820E-04	1
1.40000000E-01	1.067322E+00	4.9174E-04	2
1.41000000E-01	1.067860E+00	4.9527E-04	1
1.42000000E-01	1.068399E+00	4.9880E-04	2
1.43000000E-01	1.068938E+00	5.0233E-04	1
1.44000000E-01	1.069478E+00	5.0586E-04	2
1.45000000E-01	1.070018E+00	5.0939E-04	1
1.46000000E-01	1.070559E+00	5.1293E-04	2
1.47000000E-01	1.071101E+00	5.1645E-04	1
1.48000000E-01	1.071643E+00	5.1999E-04	2
1.49000000E-01	1.072186E+00	5.2352E-04	1
1.50000000E-01	1.072729E+00	5.2706E-04	2
1.51000000E-01	1.073273E+00	5.3058E-04	1
1.52000000E-01	1.073818E+00	5.3412E-04	2
1.53000000E-01	1.074364E+00	5.3765E-04	1
1.54000000E-01	1.074910E+00	5.4119E-04	2
1.55000000E-01	1.075456E+00	5.4472E-04	1
1.56000000E-01	1.076004E+00	5.4826E-04	2
1.57000000E-01	1.076552E+00	5.5179E-04	1
1.58000000E-01	1.077100E+00	5.5533E-04	2
1.59000000E-01	1.077649E+00	5.5886E-04	1
1.60000000E-01	1.078199E+00	5.6240E-04	2
1.61000000E-01	1.078750E+00	5.6593E-04	1
1.62000000E-01	1.079301E+00	5.6947E-04	2
1.63000000E-01	1.079853E+00	5.7300E-04	1
1.64000000E-01	1.080405E+00	5.7654E-04	2
1.65000000E-01	1.080958E+00	5.8007E-04	1
1.66000000E-01	1.081512E+00	5.8362E-04	2
1.67000000E-01	1.082066E+00	5.8715E-04	1
1.68000000E-01	1.082621E+00	5.9069E-04	2
1.69000000E-01	1.083177E+00	5.9422E-04	1
1.70000000E-01	1.083733E+00	5.9777E-04	2
1.71000000E-01	1.084290E+00	6.0130E-04	1
1.72000000E-01	1.084848E+00	6.0485E-04	2

1.73000000E-01	1.085406E+00	6.0838E-04	1
1.74000000E-01	1.085965E+00	6.1192E-04	2
1.75000000E-01	1.086525E+00	6.1546E-04	1
1.76000000E-01	1.087085E+00	6.1900E-04	2
1.77000000E-01	1.087646E+00	6.2254E-04	1
1.78000000E-01	1.088207E+00	6.2608E-04	2
1.79000000E-01	1.088770E+00	6.2962E-04	1
1.80000000E-01	1.089333E+00	6.3316E-04	2
1.81000000E-01	1.089896E+00	6.3670E-04	1
1.82000000E-01	1.090460E+00	6.4025E-04	2
1.83000000E-01	1.091025E+00	6.4378E-04	1
1.84000000E-01	1.091591E+00	6.4733E-04	2
1.85000000E-01	1.092157E+00	6.5086E-04	1
1.86000000E-01	1.092724E+00	6.5441E-04	2
1.87000000E-01	1.093292E+00	6.5795E-04	1
1.88000000E-01	1.093860E+00	6.6150E-04	2
1.89000000E-01	1.094429E+00	6.6504E-04	1
1.90000000E-01	1.094998E+00	6.6859E-04	2
1.91000000E-01	1.095569E+00	6.7212E-04	1
1.92000000E-01	1.096139E+00	6.7567E-04	2
1.93000000E-01	1.096711E+00	6.7921E-04	1
1.94000000E-01	1.097283E+00	6.8276E-04	2
1.95000000E-01	1.097856E+00	6.8630E-04	1
1.96000000E-01	1.098430E+00	6.8985E-04	2
1.97000000E-01	1.099004E+00	6.9339E-04	1
1.98000000E-01	1.099579E+00	6.9694E-04	2
1.99000000E-01	1.100155E+00	7.0048E-04	1
2.00000000E-01	1.100731E+00	7.0404E-04	2
2.01000000E-01	1.101262E+00	7.0405E-04	1
2.02000000E-01	1.101707E+00	7.0407E-04	1
2.03000000E-01	1.102083E+00	7.0408E-04	1
2.04000000E-01	1.102399E+00	7.0409E-04	1
2.05000000E-01	1.102665E+00	7.0410E-04	1
2.06000000E-01	1.102890E+00	7.0411E-04	1
2.07000000E-01	1.103080E+00	7.0413E-04	1
2.08000000E-01	1.103241E+00	7.0414E-04	1
2.09000000E-01	1.103378E+00	7.0415E-04	1
2.10000000E-01	1.103494E+00	7.0416E-04	1
2.11000000E-01	1.103592E+00	7.0417E-04	1

Apéndice B

2.12000000E-01	1.103677E+00	7.0417E-04	1
2.13000000E-01	1.103749E+00	7.0418E-04	1
2.14000000E-01	1.103811E+00	7.0419E-04	1
2.15000000E-01	1.103865E+00	7.0420E-04	1
2.16000000E-01	1.103911E+00	7.0421E-04	1
2.17000000E-01	1.103951E+00	7.0422E-04	1
2.18000000E-01	1.103987E+00	7.0422E-04	1
2.19000000E-01	1.104018E+00	7.0423E-04	1
2.20000000E-01	1.104046E+00	7.0424E-04	1
2.21000000E-01	1.104070E+00	7.0425E-04	1
2.22000000E-01	1.104093E+00	7.0425E-04	1
2.23000000E-01	1.104113E+00	7.0426E-04	1
2.24000000E-01	1.104131E+00	7.0427E-04	1
2.25000000E-01	1.104148E+00	7.0427E-04	1
2.26000000E-01	1.104164E+00	7.0428E-04	1
2.27000000E-01	1.104178E+00	7.0428E-04	1
2.28000000E-01	1.104192E+00	7.0429E-04	1
2.29000000E-01	1.104205E+00	7.0430E-04	1
2.30000000E-01	1.104218E+00	7.0430E-04	1
2.31000000E-01	1.104230E+00	7.0431E-04	1
2.32000000E-01	1.104240E+00	7.0431E-04	1
2.33000000E-01	1.104251E+00	7.0432E-04	1
2.34000000E-01	1.104261E+00	7.0432E-04	1
2.35000000E-01	1.104272E+00	7.0433E-04	1
2.36000000E-01	1.104282E+00	7.0433E-04	1
2.37000000E-01	1.104292E+00	7.0434E-04	1
2.38000000E-01	1.104302E+00	7.0434E-04	1
2.39000000E-01	1.104312E+00	7.0435E-04	1
2.40000000E-01	1.104322E+00	7.0435E-04	1
2.41000000E-01	1.104332E+00	7.0436E-04	1
2.42000000E-01	1.104341E+00	7.0436E-04	1
2.43000000E-01	1.104351E+00	7.0437E-04	1
2.44000000E-01	1.104361E+00	7.0437E-04	1
2.45000000E-01	1.104370E+00	7.0438E-04	1
2.46000000E-01	1.104379E+00	7.0438E-04	1
2.47000000E-01	1.104389E+00	7.0438E-04	1
2.48000000E-01	1.104398E+00	7.0439E-04	1
2.49000000E-01	1.104407E+00	7.0439E-04	1
2.50000000E-01	1.104417E+00	7.0440E-04	1

2.51000000E-01	1.104426E+00	7.0440E-04	1
2.52000000E-01	1.104435E+00	7.0440E-04	1
2.53000000E-01	1.104444E+00	7.0441E-04	1
2.54000000E-01	1.104454E+00	7.0441E-04	1
2.55000000E-01	1.104463E+00	7.0441E-04	1
2.56000000E-01	1.104472E+00	7.0442E-04	1
2.57000000E-01	1.104481E+00	7.0442E-04	1
2.58000000E-01	1.104490E+00	7.0443E-04	1
2.59000000E-01	1.104500E+00	7.0443E-04	1
2.60000000E-01	1.104509E+00	7.0443E-04	1
2.61000000E-01	1.104518E+00	7.0443E-04	1
2.62000000E-01	1.104527E+00	7.0444E-04	1
2.63000000E-01	1.104536E+00	7.0444E-04	1
2.64000000E-01	1.104545E+00	7.0444E-04	1
2.65000000E-01	1.104554E+00	7.0445E-04	1
2.66000000E-01	1.104564E+00	7.0445E-04	1
2.67000000E-01	1.104573E+00	7.0445E-04	1
2.68000000E-01	1.104582E+00	7.0446E-04	1
2.69000000E-01	1.104591E+00	7.0446E-04	1
2.70000000E-01	1.104600E+00	7.0446E-04	1
2.71000000E-01	1.104609E+00	7.0446E-04	1
2.72000000E-01	1.104618E+00	7.0447E-04	1
2.73000000E-01	1.104627E+00	7.0447E-04	1
2.74000000E-01	1.104637E+00	7.0447E-04	1
2.75000000E-01	1.104646E+00	7.0447E-04	1
2.76000000E-01	1.104655E+00	7.0448E-04	1
2.77000000E-01	1.104664E+00	7.0448E-04	1
2.78000000E-01	1.104673E+00	7.0448E-04	1
2.79000000E-01	1.104682E+00	7.0448E-04	1
2.80000000E-01	1.104691E+00	7.0449E-04	1
2.81000000E-01	1.104700E+00	7.0449E-04	1
2.82000000E-01	1.104709E+00	7.0449E-04	1
2.83000000E-01	1.104719E+00	7.0449E-04	1
2.84000000E-01	1.104728E+00	7.0449E-04	1
2.85000000E-01	1.104737E+00	7.0450E-04	1
2.86000000E-01	1.104746E+00	7.0450E-04	1
2.87000000E-01	1.104755E+00	7.0450E-04	1
2.88000000E-01	1.104764E+00	7.0450E-04	1
2.89000000E-01	1.104773E+00	7.0450E-04	1

Apéndice B

2.90000000E-01	1.104782E+00	7.0451E-04	1
2.91000000E-01	1.104791E+00	7.0451E-04	1
2.92000000E-01	1.104800E+00	7.0451E-04	1
2.93000000E-01	1.104810E+00	7.0451E-04	1
2.94000000E-01	1.104819E+00	7.0451E-04	1
2.95000000E-01	1.104828E+00	7.0452E-04	1
2.96000000E-01	1.104837E+00	7.0452E-04	1
2.97000000E-01	1.104846E+00	7.0452E-04	1
2.98000000E-01	1.104855E+00	7.0452E-04	1
2.99000000E-01	1.104864E+00	7.0452E-04	1
3.00000000E-01	1.104873E+00	7.0452E-04	1

* EXECUTION TIME: 558.25 SECONDS *
